振动理论

地震出版社

[General Information]

书名=振动理论

作者=（日）大崎顺彦著　谢礼立　周雍年　袁一凡译

页数=250

SS号=10946717

出版日期=1990年10月第1版

前　言

笔者是建筑结构学丛书编辑委员之一，参与了制定丛书的出版计划。当然，最初是设想丛书各卷能全面反映建筑结构学的主要领域，而且做到基础编与应用编相互平衡。但是随后我却感到，在基础编中应当有一卷介绍振动的基本理论。特别是最近超高层建筑的普及、电子计算机的飞跃进步等事物的出现，超出了当初出版计划的预想，使我越发感到有必要出版这样一本书。

前年夏天，同编辑委员会商谈之后，决定追加一卷关于振动基础内容的书。曾经考虑过几位执笔者，但是出于种种原因，结果仍由我本人来提笔了。这本书作为丛书中的一卷，却以和其他各卷稍有不同的形式问世，原因就在于此。

本书简单取名为"振动理论"，然而内容只限于质点系统的线性振动，至于连续体以及非线性振动丝毫没有涉及。这里事先予以说明，以避"挂羊头卖狗肉"之嫌。

直到前年为止，笔者在东京大学工学部建筑系讲授四年级的"建筑振动学"课程。另外，数年前还在广岛大学研究生院讲授过振动理论。这些课程的讲义构成了本书的骨架。

笔者虽然从事过许多与振动有关的研究，但并不是振动理论专家，因此十分担心书中有考虑不周或错误之处。但愿本书能对读者起到一点作用，同时书中若有不当之处也希望各位指正。

大崎顺彦

1980年4月

中文版序言

笔者在长期的研究生涯中一直从事建筑结构学中有关建筑物振动和抗震设计方面的研究，尤其关于原子能发电站的抗震设计、地基与结构的相互作用等研究领域是笔者的专业。

在日本和世界各国，有关振动理论的应用方面的著作很多，但仅就最基本的问题进行详细论述的专著却似乎意外地少见。笔者在担任东京大学工学部建筑学科的教授期间，有时作为讲义之一，讲授过振动理论的基本知识。将这些讲义内容汇总起来后，考虑到都是些很重要的基础知识，或许会对更多的人有用，于是便在1980年出版了这本《振动理论》。

本书的特点是始终忠实于介绍基础知识的原则，内容只限于质点系的线性振动，没有述及连续系统和非线性振动的问题。此外，书中附有很多计算机程序。

承蒙谢礼立先生的努力，使本书中文版得以顺利出版，这对作者来说是一件令人十分高兴的事，在此谨向译者表示衷心的感谢。如果本书能对日中两国的友好和学术交流起一点微薄的作用，本人将感到十分欣慰。

大崎顺彦

1988年6月

符号一览表

在本书中，凡有关数量的符号，即数值可变化的常数、变量、函数和下标等均用斜体字印刷；数值不变化的常数（如圆周率π、虚数单位i、自然对数的底e等）、运算符号（如sin表示微分的d等）和表示单位的符号均用正体（罗马）字印刷，这样便能区别开表示质点序号的i和表示虚数单位的i，表示时间的t和表示单位的t（吨），表示沿x轴方向的位移x和表示轴方向的x等等。

此外，对于如$\mathrm{d}d/\mathrm{d}t$一类的表示法，虽然在本书中未曾出现，但也不会产生误解。

符号	意义
a	常数，地震动位移振幅
a_i	矩阵元素
A	常数，积分常数
A_{ij}	余因子
A_k	富里哀余弦系数
b	常数
B	常数，积分常数，留数
B_k	富里哀正弦系数
c	常数，阻尼系数
c_{cr}	临界阻尼系数
C	常数，积分常数，待定系数，基底剪力系数
$[C]$	阻尼矩阵
C_k	复富里哀系数
e	自然对数的底
e	偏心距
E	杨氏系数，杨氏模量
f	位移系数
$[f]$	位移矩阵
$f(t)$	时间函数
F	泛函(数)
$F(p)$	拉普拉斯变换
$F(\omega)$	富里哀变换
$\mathcal{F}$	富里哀变换
$\mathcal{F}^{-1}$	逆富里哀变换
g	重力加速度$=980\mathrm{cm/s^2}$
h	阻尼常数，阻尼比
$h(t)$	脉冲反应函数
H	埃尔米特(Hermite)式，层间高度，建筑物高度
$H(\omega)$	频率响应函数
i	虚数单位
i	质点序号，行的序号
I	冲量，面积二次矩
$[I]$	单位矩阵
I_h	谱烈度
$\Im$	虚部
j	振型阶数，列的序号
J	惯性(极)矩
k	弹簧常数，整数，谐和振动分量的阶数
K	刚度影响系数
$[K]$	刚度矩阵
l	整数，建筑物长度，构件长度
$\mathscr{L}$	拉普拉斯变换
$\mathscr{L}^{-1}$	拉普拉斯逆变换
m	质量，整数
$[M]$	质量矩阵
$\mathcal{M}$	有效质量
n	质点数，自由度数
N	数据个数
p	圆频率，复数
P	力
$\{P\}$	激振矢量
$P(p)$	p的多项式
q	广义坐标
q_s	振型基本解

q_a　标准加速度反应谱

q_v　标准速度反应谱

q_d　标准位移反应谱

Q　剪力，内积，二次形，广义力，层间剪力

$Q(p)$　p的多项式

R　衰减能量（散逸函数），层间弯矩

$\mathscr{R}$　实部

S_a　绝对加速度反应谱

S_v　相对速度反应谱

S_d　相对位移反应谱

S_{pa}　拟加速度反应谱

S_{pv}　拟速度反应谱

S_{pd}　拟位移反应谱

S_n　有限富里哀近似

t　时间，时刻

T　周期，动能

$\bar{T}$　单质点系的无阻尼固有周期

$\bar{T}_d$　单质点系的有阻尼固有周期

u　固有函数

$\{u\}$　固有（振型）矢量

$[U]$　振型矩阵，模态矩阵

v　速度

V　势能

W　重量

W_d　消耗能量

W_e　供给能量

x　x轴方向的位移，复数的实部

$\bar{x}$　绕x轴的旋转角

x_m　峰值振幅

X　振幅

$\bar{X}$　复振幅

y　y轴方向的位移，地面运动位移，复数的虚部

$\bar{y}$　绕y轴的旋转角

z　z轴方向的位移，复数

$\bar{z}$　绕z轴的旋转角

α　加速度，复数的实部

β　参与系数，复数的虚部

δ　（广义的）位移，对数衰减率

$\{\delta\}$　位移矢量

δ　变分

$\delta(t)$　DELTA函数

$\zeta(t)$　脉冲反应函数

η　振幅比

θ　偏角，回转角

λ　固有值，常数，拉格朗日待定常数

$[\Lambda]$　谱矩阵

μ　动态放大率，动态放大系数

ν　频率

ν_0　基本频率

$\bar{\nu}$　单质点系的无阻尼固有频率

$\bar{\nu}_d$　单质点系的有阻尼固有频率

ξ　绝对位移

σ　标准差

τ　时间，时刻

ϕ　相位差，扭转角

ψ　能量损耗率

ω　圆频率

ω_0　基本圆频率

$\bar{\omega}$　单质点系的无阻尼固有圆频率

$\bar{\omega}_d$　单质点系的有阻尼固有圆频率

$[\ \ ]$　矩阵

$\lceil\ \ \rfloor$　对角矩阵

$\{\ \ \}$　矢量

$*$　褶积

$/\!\!/$　反褶积

*　（上角记号）共轭复数

$\mathscr{L}$　拉普拉斯变换

$\mathscr{F}$　富里哀变换

目　　录

第一章　动力学基础

1.1　运动与坐标

一般说来，某个点经过一定时间后位置发生移动的现象称为运动。为表示位置的移动，必须用坐标系作为度量基准。

运动点位置的移动量叫位移，位移随时间的变化率为速度，速度随时间的变化率为加速度。设点作直线运动的时间为 t 、位移为 x，则

$$速度\quad v = dx/dt = \dot{x} \tag{a}$$

$$加速度\quad a = dv/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \tag{b}$$

一般将论述运动与相关作用力间关系的力学分支称为动力学。

如果以厘米（cm）为单位度量位移，则如式（a）及式（b）所示，速度单位是厘米/秒(cm/s)，加速度单位是厘米/秒²(cm/s²)，亦称作伽(gal)。

通常用图1.1(a)所示的右手直角坐标系作为表示点空间位置的坐标系。假定xy面为设置建筑物的水平地面、则 z 轴垂直指向上方。只分析建筑物在平面内的运动时，可以用图1.1(b)所示的平面坐标系。由于这时用不着坐标 y，在本书中若不作特别说明，就以 y 表示 x 方向的地面位移。

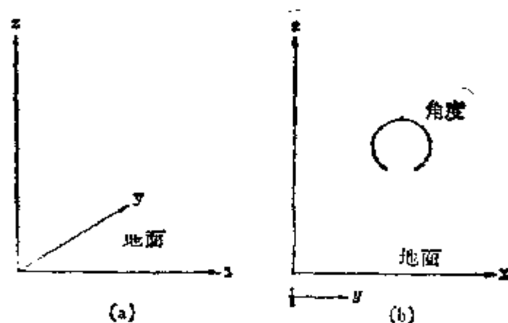


图1.1　坐标系

坐标的概念不仅仅是像（x, y, z）或（x, z）那样，用沿坐标轴方向的长度量纲表示点的空间位置，而且还用于更广义的情况。为表示点的位置，在极坐标表示方法中用角度，所以角度也可看作是一种坐标。我们规定在xz平面内角度坐标的正向为沿 y 轴正向前进的右旋方向，即图(b)中箭头表示的方向，并以弧度（rad）为单位。因此角速度单位为弧度/秒(rad/s)，角加速度为弧度/秒²（rad/s²）。

描述由构件或多个构件组成的结构物并作力学分析用的模型，称之为结构系统，或简称为系统。本书主要研究对象是质点系统。这是结构物的极端简单的理想化系统。若系统有 n 个可能的运动方向，则称为具有 n 个自由度。

具有 n 个自由度的系统中各点的位置，也就是系统的状态，可以用 n 个互相独立的变量来完全表达。这些独立的变量也是一种坐标，称为广义坐标。如上所述，广义坐标可以取长度量纲的量，也可以用角度表示。

两端固支，长度为 L 并置于 x 方向的构件的挠度用形如

$$z=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{c}$$

的富里哀级数表示。一旦确定了a_k，挠度 z 的形状就完全确定了，因而这时各系数a_k（$k=1$，2，3…）就是广义坐标。如式(c)所示，系数a_k有无限多个，因而像该构件这样的连续系统的自由度数目一般是无限大。如果用构件上有限个离散点，比如 n 个点的位移来近似表示它的挠度，即将构件作为离散系统来处理，则它的自由度为 n，式(c)中只取 n 项而成为有限富里哀级数。

式(c)中的挠度是用正弦函数表示的，还可以用满足两端边界条件的任意已知函数$\phi_k(x)$来表示

$$z=\sum_{k=1}^{n} b_k\phi_k(x)$$

这时b_k也是广义坐标，函数$\phi_k(x)$称为形函数。

图1.2表示一个位移随时间变化的例子。在这种情况下，时间也用坐标表示。一般某种量用时间的函数表示时，称之为时间过程或简称时程。时程可以用时间的连续函数表示，也可以用以某个时间段为间隔的离散值表示。

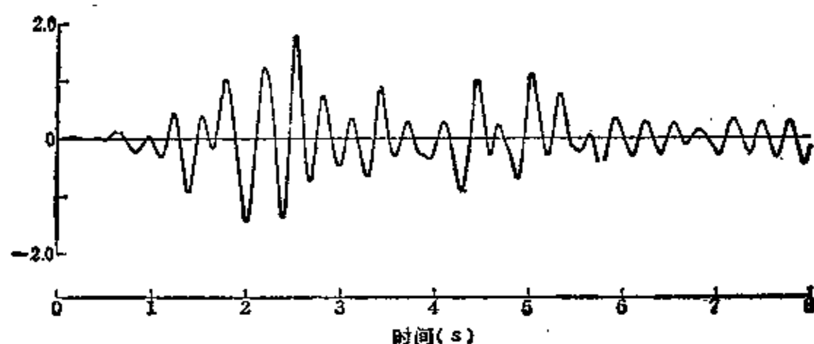


图1.2　位移时程

对具有 n 个自由度的系统，描述其振动时实际位移的坐标x_1、x_2、…x_n可以用$q^{(1)}(t)$，$q^{(2)}(t)\cdots q^{(n)}(t)$等独立的时间函数的线性组合表示为

$$\left.\begin{aligned} x_1&=u_1^{(1)}q^{(1)}+u_1^{(2)}q^{(2)}+\cdots\cdots+u_1^{(n)}q^{(n)}\\ x_2&=u_2^{(1)}q^{(1)}+u_2^{(2)}q^{(2)}+\cdots\cdots+u_2^{(n)}q^{(n)}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=u_n^{(1)}q^{(1)}+u_n^{(2)}q^{(2)}+\cdots\cdots+u_n^{(n)}q^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

当系数$u_i^{(j)}$(i，$j=1$，$2\cdots n$)确定后，可以由函数$q^{(j)}$($j=1$，$2\cdots n$)定出所有的坐标x_i，因而可以完全描述系统的状态。$q^{(j)}(t)$也是广义坐标。这里把时间函数看成是一种坐标。式(d)表示由 n 维坐标x_i转换为同样是 n 维坐标$q^{(j)}$的坐标变换关系。

特别当$u_i^{(j)}$满足一定条件时，广义坐标$q^{(j)}$($j=1$，$2\cdots n$)可分别表示简谐振动。这类分别表示简谐振动的广义坐标称为正则坐标。这种情况下，式(d)表示将复杂的运动分解为单纯的简谐运动。

在动力学中将坐标的意义作如此极为广义的理解，特别是式(d)的坐标变换和正则坐标的概念在本书中经常出现，在结构系统的振动分析中起着重要的作用。

1.2 牛顿运动定律与运动方程式

众所周知，运动与作用力的关系是牛顿确立的，归纳为如下三个基本定律：

第一定律：静止或作匀速直线运动的物体，在无外力作用时，保持原状态不变。

第二定律：速度的变化即加速度与作用力的大小成比例，与作用力同向。

第三定律：作用力与反作用力大小相等，方向相反。

上述定律称为牛顿运动定律。

令加速度为 a，作用力为 P（单位：t），将第二定律用公式表示有 $a\propto P$，设比例常数为 $1/m$，则第二定律可表示成

$$a=(1/m)P \tag{a}$$

或

$$P=ma \tag{1.1}$$

式(a)中比例常数的倒数 m 为质量。

表示牛顿第二定律的式(a)也可以看作是质量的定义，因而质量的单位是吨·秒²/厘米(t·s²/cm)。

同样，牛顿第二定律的表达式（1.1）称为运动方程，是描述运动现象的所有方程式的原型

1.3 达朗贝尔原理与惯性力

将运动方程（1.1）移项得

$$(-ma)+P=0 \tag{1.2}$$

形式上表示（$-ma$）及 P 两个力互相平衡。这时称（$-ma$）为惯性力，或惯性抵抗力。

这样一来，即使对于具有加速度的运动物体，只要考虑包含惯性力在内的力平衡，就可以将动力问题当成静力平衡问题来处理，这称之为达朗贝尔原理。从式（1.1）到（1.2）在数学上只不过是单纯的移项，但在物理意义上，是将运动中止，把动力学当成静力学一样来考虑，具有重要意义。另一方面，在平衡方程中必须考虑所谓惯性力，又是与静力学本质不同的动力学特征。

式（1.2）中力 P 不仅只是作用在质量上的外力，还包括除抵抗加速度的惯性力外的所有力，如抵抗位移的恢复力，抵抗速度的阻尼力等。

第二章　单质点系统的振动

本章及下一章将详细讨论单质点系统振动的有关问题。单质点系是最简单的振动系统，没有比它更简单的系统了。但是由分析单质点系的运动特征可以学到非常多的振动知识。

一般不能将实际的结构物当成单质点系处理，大多要处理成有大量质点数的多质点系统。但如第六章所述，不管多么复杂的质点系，其振动在一定条件下可以分解为单质点系的振动再叠加。因此单质点系的振动是所有振动分析理论的基础。

2.1　单质点系统模型

将物体的全部质量集中在重心，以重心的位置和运动代表物体的位置和运动，这时质量集中处的几何点称为质点。用无质量构件联结质点所形成的力学系统称为质点系统。

单质点系统如图2.1(a)所示，这是一个将单个质点由无质量构件与无限刚的地基或结构物其他部分相连结的质点系统。只是为了便于图示，质点没有用几何点，而是用一定大小的质量块表示。此外，如图2.1(b)所示，质点只在水平方向移动，垂直方向上没有位移。质点的质量为m，设支持质点的构件为具有一定弹簧常数k（单位：t/cm）的弹簧，则当质点发生位移x（单位：cm）时，弹簧便产生弹性力kx（单位：吨(t)）。这个弹性力阻止发生位移，作用方向是使质点回到图2.1(a)所示的平衡位置上，故称为恢复力或弹性反力。

质点原来是几何点，没有必要考虑转动或对转动的惯性反力。或者说这时如图2.2(a)所示，即使是具有一定尺寸的质量块，也假定它不转动或有使它不能转动的约束，这无非是为使问题简化。这种只考虑水平位移而不考虑转动的系统变形状态叫剪切型。与此相对应，除水平位移外还考虑转动的变形状态称为弯曲剪切型。

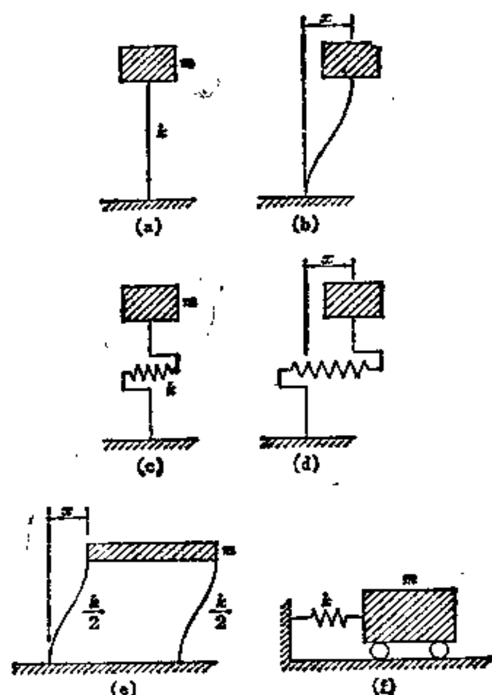


图2.1　单质点系模型

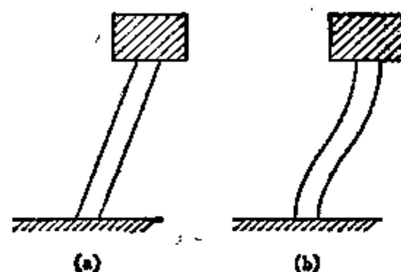


图2-2　剪切型位移

但是即使是剪切型运动，并不一定意味着弹簧或由弹簧代表的实际构件只有图2.2(a)那样纯粹的剪切变形。只要不考虑质点的转动，即使弹簧作纯粹的弯曲变形，总体仍然是剪切变形，如图2.2(b)所示。在实际的建筑物中，如所周知，只要不是极短的柱或墙，水平位移大部分是由垂直构件的弯曲变形而引起的，可以忽略由剪切变形引起的水平位移。

图2.1(a)及(b)所示弹簧的弹性一般分布在弹簧的全长上。若将弹簧的作用集中于一处，可以把单自由度系统表示如图2.1的(c)及(d)。为强调不使质量部分发生转动，并更像建筑物的模型，许多教科书采用图(e)所示的单质点系统模型。其实这种模型也会在产生水平位移的同时伴随有很小的竖向变形。所以描述单质点系统的模型以图2.1(f)所示为最合理。但建筑物动力分析中不太习惯用这个模型，本书对单质点系或多质点系主要采用图2.1(a)，(b)或(e)的描述方法。

2.2 自由振动

存无外力作用下，而且系统的底部即基础固定不动时的振动称为自由振动。与此相反，当系统有外力作用时，或如地震时那样，基底以某种加速度运动时的振动称为强迫振动。自由振动是受系统固有特性支配的，与强迫振动的性质也有重要关系。

2.2.1 运动方程式及其解

将图2.1(a)及(b)的单质点系再画在图2.3中，图中

m：质量（单位：$t\cdot s^2/cm$）

k：弹簧常数（单位：t/cm）

x：位移（单位：cm）

坐标系与图1.1(b)一致，只考虑x方向，位移、加速度和作用力都以x轴正方向，即图中向右的方向为正。

这时在运动方程（1.2）中惯性力为

$$-ma=-m\ddot{x} \tag{2.1}$$

因为没有外力，作用在质点上的力只有与位移成比例的弹簧恢复力，在图中向左作用，所以

$$P=-kx \tag{2.2}$$

则式（1.2）成

$$-m\ddot{x}-kx=0 \tag{2.3}$$

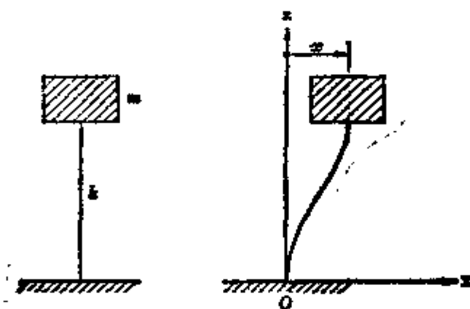


图2.3 单质点系的振动

即

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{2.4}$$

或以m除之，且设

$$\bar{\omega}=\sqrt{k/m} \quad \text{（单位：rad/s）} \tag{2.5}$$

则有

$$\ddot{x}+\bar{\omega}^2x=0 \tag{2.6}$$

一般地，当x是变量t的函数时，形如

$$\frac{d^nx}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots\cdots+P_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+P_n(t)x=Q(t)$$

的微分方程称为线性 n 阶常微分方程，特别当$Q(t)=0$时称为是齐次的。此外，在式（2.6）中，x 的系数$\bar{\omega}^2$是不含变量 t 的常数，这时线性 n 阶齐次微分方程式有 n 个线性无关的特解，这些特解的线性组合为方程的通解。

设c_1，$c_2 \cdots c_n$为常数，在 n 个 t 的函数x_1，$x_2 \cdots x_n$的线性组合，即$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$中，只有当$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$时

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\equiv 0$$

才成立，这时x_1，$x_2 \cdots x_n$称为线性独立或线性无关。一般为使x_1，$x_2 \cdots x_n$线性无关，必须满足

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2\cdots\cdots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\cdots\cdots & \dot{x}_n \\ & \cdots\cdots & \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)}\cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.7}$$

函数$W(t)$称为朗斯基（wronski）行列式或朗斯基式。

式（2.6）为线性二阶常系数齐次常微分方程，有两个线性无关的解，其线性组合为方程的通解，具体形式为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\bar{\omega}t \\ x_2 &= \sin\bar{\omega}t \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中每一个都是式（2.6）的解，代入原式很容易得到验证。与式（a）中x_1，x_2有关的朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix} \cos\bar{\omega}t & \sin\bar{\omega}t \\ -\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t & \bar{\omega}\cos\bar{\omega}t \end{vmatrix}$$
$$=\bar{\omega}(\cos^2\bar{\omega}t+\sin^2\bar{\omega}t)=\bar{\omega}\neq 0$$

故x_1与x_2线性无关。因而微分方程（2.6）的通解为它们的线性组合

$$x=A\cos\bar{\omega}t+B\sin\bar{\omega}t \tag{2.8}$$

这样便求得了作为时间 t 的函数的质点位移。将式（2.8）对时间微分得质点速度

$$\dot{x}=-A\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t+B\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t \tag{2.9}$$

式（2.8）和（2.9）中的常数A，B就是所谓积分常数，根据给定 $t=0$ 时的初始条件可确定其值。

2.2.2 初始条件

(1) 初始条件：$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$

表示给质点以位移x_0，并于 $t=0$ 时释放。将 $t=0$ 代入式(2.8)得$A=x_0$，令式(2.9)中 $t=0$ 得$B=0$，由此可确定常数A和B，将这些值代入通解（2.8）中，得到运动位移的表达式为

$$x=x_0\cos\bar{\omega}t \tag{a}$$

(2) 初始条件：$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$

表示给质点以位移x_0，在 $t=0$ 时使之有初速度$\dot{x}_0$并释放。令式(2.8)中 $t=0$ 得 $A=x_0$，由式（2.9）得$B\bar{\omega}=\dot{x}_0$，即$B=\dot{x}_0/\bar{\omega}$，式（2.8）变成

$$x=x_0\cos\bar{\omega}t+(\dot{x}_0/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}t \tag{2.10}$$

前面的式（a）不过是式（2.10）在$\dot{x}_0=0$时的特殊情形。

式（2.10）还可以写成

$$x=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\bar{\omega})^2}\cos(\bar{\omega}t+\phi) \tag{b}$$

或者是

$$x=X\cos(\bar{\omega}t+\phi) \tag{2.11}$$

这里

$$X=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\bar{\omega})^2},\ \phi=\arctan(-\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0) \tag{2.12}$$

由式(b)或式（2.11）所表达的位移时程用图形表示如图2.4。

（3）未给出特定初始条件的，回到原式(2.8)，即$x=A\cos\bar{\omega}t+B\sin\bar{\omega}t$。也可以写成

$$x=X\cos(\bar{\omega}t+\phi) \tag{2.13}$$

这里

$$X=\sqrt{A^2+B^2},\ \phi=\arctan(-B/A) \tag{2.14}$$

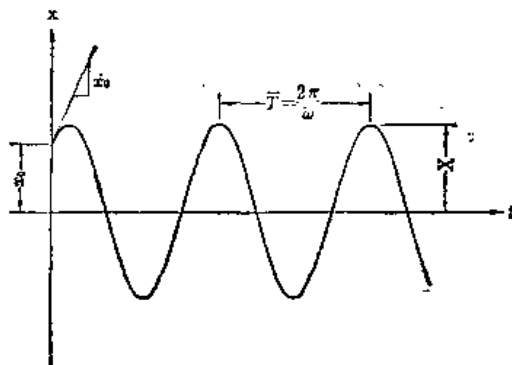


图2.4 初始条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$时的自由振动

2.2.3 振动特性

用图2.4表示初始条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$时单质点系的位移时程。如图所示，位移不断在$\pm X$间反复变化。某种量围绕中性轴不断反复正负变化的现象即为振动，振动量的摆动幅度（这里是位移X）称为振幅。当然，$X>0$即表示正值。将正负两侧的摆动幅度合在一起表示振动范围时，称$2X$为全振幅。式(2.11)中的$\bar{\omega}t+\phi$称为相位，或以角度衡量称为相(位)角。将相位对时间微分，即相位变化的速度称为相速度。其值由式（2.5)给定，即

$$\bar{\omega}=\sqrt{k/m} \qquad (\text{单位：rad/sa}) \tag{2.15}$$

称为系统的固有圆频率。

在式（2.11）中

$$\cos(\bar{\omega}t+\phi)=\cos(\bar{\omega}t+\phi+2\pi)=\cos[\bar{\omega}(t+2\pi/\bar{\omega})+\phi]$$

就是说每经过时间$2\pi/\bar{\omega}$将出现相同的相位，由图2.4看得很清楚，同一相位反复出现的时间间隔为

$$\bar{T}=2\pi/\bar{\omega} \qquad (\text{单位：s}) \tag{2.16}$$

称为振动的固有周期，其倒数为

$$\bar{\nu}=1/\bar{T} \qquad (\text{单位：1/s，Hz或cps}) \tag{2.17}$$

称为固有频率，表示同一相位在一秒内出现的次数。单位Hz是Hertz的缩写，单位cps是每秒几周(cycles per second)的缩写。

固有周期、固有频率及固有圆频率之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\bar{T}&=1/\bar{\nu}=2\pi/\bar{\omega}\\ \bar{\nu}&=1/\bar{T}=\bar{\omega}/2\pi\\ \bar{\omega}&=2\pi/\bar{T}=2\pi\bar{\nu}\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

由式（2.15）得到

$$\left.\begin{aligned}\bar{T}&=2\pi\sqrt{m/k}\\ \bar{\omega}&=(1/2\pi)\sqrt{k/m}\end{aligned}\right\}$$

由式（2.19）或（2.15）可知，固有周期、固有频率和固有圆频率都由系统的固有值决定，与初始条件、振幅等无关。

相位$\bar{\omega}t+\phi$中出现的ϕ称为相位延迟。它的含义是把由式（2.11）表示的振动$x=X\cos\times(\bar{\omega}t+\phi)$与以$\phi=0$时的振动即

$$x=X\cos\bar{\omega}t \qquad (a)$$

为基准相比时，同一相位出现的时间差。由式（2.12）可知，相位延迟随初始条件而变。图2.5为几个典型相位延迟的例子。图中以虚线表示基准振动。如图所示，相位延迟通常由$0\leqslant\phi\leqslant2\pi$间的正角度表示。

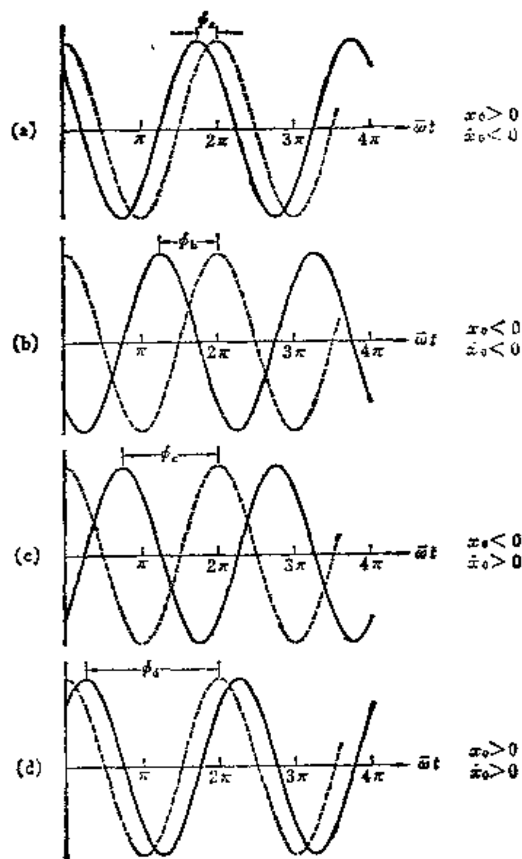


图2.5 相位延迟

图2.5中，横轴由量纲为rad的$\bar{\omega}t$表示，相位延迟用时间表示为$\phi/\bar{\omega}$(单位：s)。图2.5中的横轴$\bar{\omega}t$即圆频率与时间的乘积称为无量纲时间，在用图形表示振动现象时，常常用它代替实际的时间轴。

【例题2.1】 计算$m=0.055\text{t}\cdot\text{s}^2/\text{cm}$，$k=120\text{t/cm}$的单质点系的各种振动特性。

〔解〕 由式（2.15）得

固有圆频率 $\bar{\omega}=\sqrt{k/m}=\sqrt{120/0.055}$
$=46.71\text{rad/s}$

又由式（2.18）得

固有周期 $T=2\pi/\bar{\omega}=2\pi/46.71=0.134\text{s}$

固有频率 $\bar{\nu}=1/T=1/0.134=7.43\text{Hz}$

【例题2.2】 求例题2.1中初始位移$x_0=0.25\text{cm}$，初始速度为$\dot{x}_0=10\text{cm/s}$时的位移时程。

〔解〕 由式（2.12）得

振幅 $X=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\bar{\omega})^2}=\sqrt{(0.25)^2+(10/46.71)^2}=0.329\text{cm}$

相角 $\phi=\arctan(-\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)=\arctan(-10/46.71/0.25)=5.575\text{rad}$

又由式（2.11）得

$$x=0.329\cos(46.71t+5.575)\text{cm}$$

【例题2.3】 将例题(2.1)的质点系放倒，由自重引起的挠度为x_s(cm)，求挠度x_s与系统固有周期T(s)间的关系。

〔解〕 质点系放倒后，式(2.3)中惯性力项$(-m\ddot{x})$由质点重量$W=mg$代替，此时平衡方程为$mg-kx_s=0$，即$m/k=x_s/g$。将此式代入计算固有周期的式(2.19)可得$T=2\pi\sqrt{m/k}=2\pi\sqrt{x_s/g}=2\pi\sqrt{x_s/980}=0.2007\sqrt{x_s}$，可得到如下近似关系

$$T\doteqdot\sqrt{x_s}/5$$

2.2.4 矢量表示

矢量是具有大小和方向的量，与只有大小——即用一个数值完全表达的标量不同。矢量在几何上用带方向的线段表示。特别是由坐标原点出发指向某点的矢量称为位置矢量。

a. 初相位

设单质点系在 $t=0$ 时给定初始条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$。这时$\bar{\omega}$为相速度即系统的固有圆频率。在图2.6的直角坐标(x, y)上，考虑x_0及$\dot{x}_0$取各种正负值的情况，横轴为初始位移x_0，纵轴为与初速度对应的$-\dot{x}_0/\bar{\omega}$，设表示固定点$(x_0, -\dot{x}_0/\bar{\omega})$的位置矢量为$X$。图2.6表示$x_0>0$，$\dot{x}_0<0$，即位置矢量在第一象限时的情形。

矢量长度即绝对值为$|X|=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\bar{\omega})^2}$。由式（2.12）可知这就是位移的振幅，因而该矢量称为位移矢量。

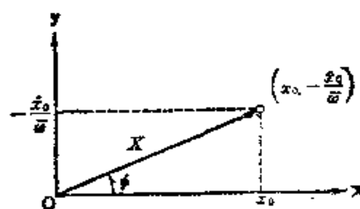


图2.6 位移矢量与初相位

设位置矢量X与x轴的夹角为 ϕ，则$\phi=\arctan(-\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)$，由式（2.12）可知它是相位延迟$\phi$的表达式。$\phi$值由初始值决定，因而称为初相位。一般在由式（2.8）

$$x=A\cos\bar{\omega}t+B\sin\bar{\omega}t \quad (a)$$

表示的振动中，如式（2.14）所示可写成$\phi=\arctan(-B/A)$。

如图2.6中箭头所示，角ϕ即初相位是从x轴出发反时针方向度量，因而初相位通常用$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$的正值表示。在包含图2.6中未画出的z轴（与纸面垂直）在内的右手系中，角度也以右旋对应z轴正向旋进为正向，仍保持右手系的原则。按此规定，图2.5中的ϕ_a，ϕ_b，ϕ_c，ϕ_d表示的初相角分别落在第1，2，3，4象限，这是与各自的x_0及$\dot{x}_0$的正负取值——或更一般的与式（a）中的系数A，B的正负值——相对应的。

表示初相位矢量位置的图形称为相位钟。只是要注意如前所述这个钟的正角是按反时针向计算的。由图2.5给出的各振动的相位钟分别示于图2.7中。

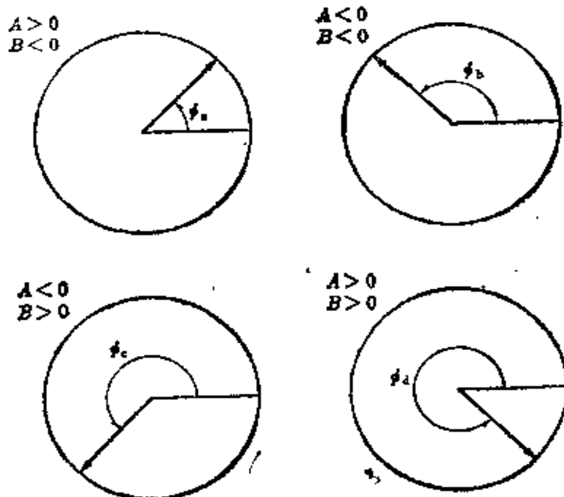


图2.7 相位钟

b. 转动矢量

下面考虑图2.6中的极坐标系，取原点O为极点，Ox为基线。设矢量以等于相速度$\bar{\omega}$的角速度，围绕极点O为中心，从所在位置开始作反时针向转动。到t时刻矢量位于图2.8(a)中的OA位置上，此时矢量与基线Ox所成的角度为相角$\bar{\omega}t+\phi$，在基线上的投影为

$$|X|\cos(\bar{\omega}t+\phi)=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\bar{\omega})^2}\cos(\bar{\omega}t+\phi)$$

这就是（2.11）式所表示的振动。

参照图2.6，考虑图2.8(b)所示的几何关系，有$\overrightarrow{OB}=x_0\cos\bar{\omega}t$及$\overrightarrow{CB}=(-\dot{x}_0/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}t$，因而$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=x_0\cos\bar{\omega}t+(\dot{x}_0/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}t$，图2.8(a)中转动矢量在基线上的投影就是（2.10）式所示的振动。

矢量转动速度为$\bar{\omega}$(单位：rad/s)，因而转一周的时间为$2\pi/\bar{\omega}$(单位：s)，即为式(2.16)的固有周期T。这样单质点系的自由振动位移完全可以用具有一定长度并按一定角速度转动

的矢量来表示。

下面考虑具有同一圆频率ϖ，不同初相位ϕ_1及ϕ_2的两个振动

$$x_1 = X_1\cos(\varpi t+\phi_1)$$
$$x_2 = X_2\cos(\varpi t+\phi_2) \qquad (b)$$

振幅X_1及X_2未必相同。如图2.9所示，这两个振动可以用转动矢量X_1及X_2表示。由于角速度ϖ相同，两个矢量在转动中相对位置不变，两矢量间夹角总是$\phi_1-\phi_2$。

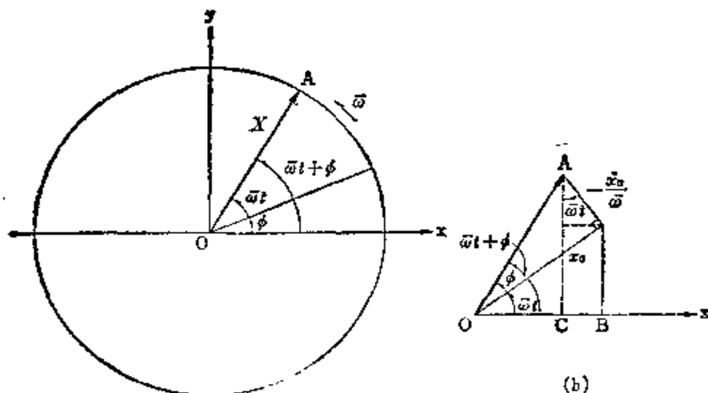


图2.8 转动矢量

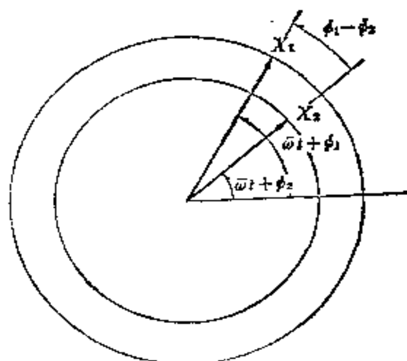


图2.9 两个转动矢量和相位差

这个角度$\phi_1-\phi_2$即式（b）所示两振动的初相位的差，通常称为相位差或者称为相位偏移。如前所述，初相位ϕ_1及ϕ_2都是用$0\leqslant\phi_1$，$\phi_2<2\pi$范围的正值表示，所以振动x_1相对于振动x_2的相位差$\phi_1-\phi_2$为

$0<\phi_1-\phi_2\leqslant\pi$及$-2\pi<\phi_1-\phi_2\leqslant-\pi$时 称为相位超前

$\pi<\phi_1-\phi_2<2\pi$及$-\pi<\phi_1-\phi_2<0$时 称为相位滞后

以某矢量为基准，用图形表示其他矢量的相位差时，可以将基准矢量固定在基线上，这时仍可使用图2.7所示的相位钟。当然，相位超前时指针在第1，2象限，滞后时在第3，4象限。

在仅讨论矢量大小和相位差时，也可以比较量纲不同的量。比如自由振动位移的通解为式（2.11）时

$$x = X\cos(\varpi t+\phi) \qquad (2.20)$$

对时间t微分得速度$\dot{x}=-\varpi X\sin(\varpi t+\phi)$，即

$$\dot{x}=\varpi X\cos(\varpi t+\phi+\pi/2) \qquad (2.21)$$

即速度振幅为ϖX，将式（2.20）与（2.21）比较，可见速度的相位比位移相位要超前$\pi/2$，因而速度可用长度为位移矢量的ϖ倍、相位差为$\pi/2$的矢量即速度矢量来表示。

将速度再对时间t微分得加速度

$$\ddot{x}=-\varpi^2X\cos(\varpi t+\phi)\text{或}$$
$$\ddot{x}=\varpi^2X\cos(\varpi t+\phi+\pi) \qquad (2.22)$$

因而加速度振幅为ϖ^2X，它的相位比式（2.20）的位移相位要超前π。表示加速度的矢量称为加速度矢量。

如上所述，式（2.11）所示的单质点系自由振动解是简谐振动，它对时间每微分一次，

振幅增大$\bar{\omega}$倍，相位也超前$\pi/2$。将位移、速度和加速度表示在同一个$\bar{\omega}t$轴上时，如图2.10所示。

在同一极坐标上，将位移、速度及加速度用各自的转动矢量表示如图2.11(a)所示。相对于位移矢量来说，速度矢量及加速度矢量的相位分别逐个超前$\pi/2$而相互正交，这三个矢量就这样保持正交并以角速度$\bar{\omega}$转动。

式(2.1)所示的惯性力为$-m\ddot{x}$，由式(2.22)得

$$\text{惯性力}=m\bar{\omega}^2X\cos(\bar{\omega}t+\phi)$$

此外由式(2.2)所示，恢复力为$-kx$，由式(2.20)得

$$\text{恢复力}=-kX\cos(\bar{\omega}t+\phi)=kX\cos(\bar{\omega}t+\phi+\pi)$$

因而将惯性力与恢复力用矢量表示时如图2.11(b)所示。相位差为π，两矢量反向。又由式(2.5)即$m\bar{\omega}^2=k$可知，两矢量大小相等，惯性力与恢复力总是保持平衡，这表明式(2.4)的关系是成立的。

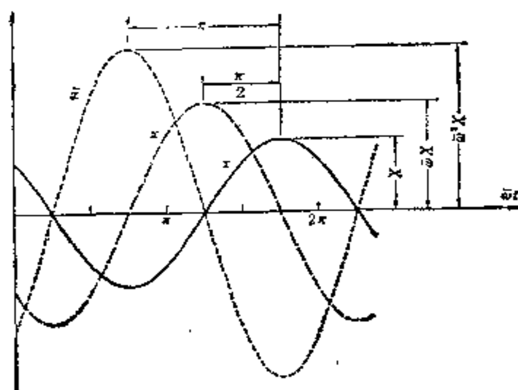


图2.10 自由振动的加速度、速度和位移

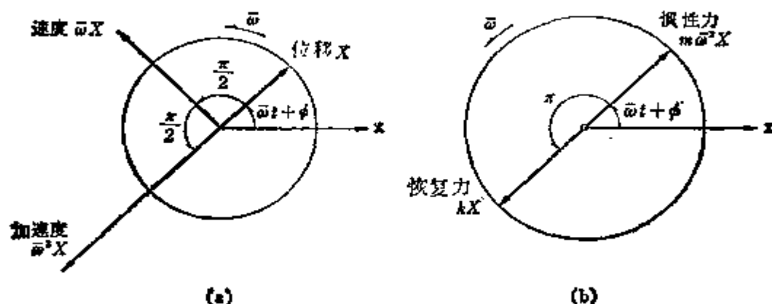


图2.11 转动矢量

2.2.5 复数表示

单质点系自由振动的微分方程式(2.6)即

$$\ddot{x}+\bar{\omega}^2x=0 \tag{2.23}$$

的解可表示为具有一定振幅、圆频率和一定初相位的时间t的余弦函数

$$x=X\cos(\bar{\omega}t+\phi) \tag{a}$$

这个振动如图2.8(a)所示，是长X的转动矢量在x轴上的投影。

同样，也可以考虑$X\sin(\bar{\omega}t+\phi)$形式的正弦函数所表示的振动，它也满足微分方程(2.23)。在图2.8(a)上考虑与x轴正交的Oy轴，则此振动可写成转动矢量在y轴上的投影

$$y=X\sin(\bar{\omega}t+\phi) \tag{b}$$

这类具有常数X，$\bar{\omega}$，ϕ并以时间t的cos函数或sin函数表示的振动，换句话说形如(2.23)的微分方程的解表示的振动，总称为谐和振动。在振幅、频率或初相位中有一个不是常数时，就不能当作谐和振动。

设x和y为实数，以i表示$\sqrt{-1}$，则形如$x+iy$的数称为复数。i为虚数单位，$y\neq 0$时iy称为虚数。x及y分别称为复数的实部及虚部。以z表示复数

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{c}$$

则其实部与虚部可分别记为

$$\left.\begin{aligned} x&=\mathscr{R}(z)\\ y&=\mathscr{I}(z)\end{aligned}\right\}$$

由图2.12所示，取原点为O的直角坐标，可以用带有坐标（x，y）的点P来表示复数$z=x+\mathrm{i}y$。这个平面称为复平面，横轴与纵轴分别称为实轴与虚轴。线段OP长$\sqrt{x^2+y^2}$称为复数$z=x+\mathrm{i}y$的绝对值，记为$|z|$或$|x+\mathrm{i}y|$。线段OP与实轴所成的角称为辐角，取图中箭头所示的反时针向为正。

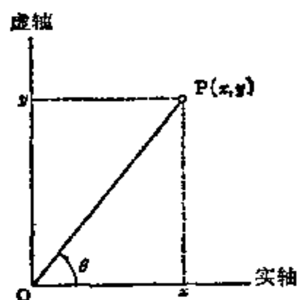


图2.12　复平面阿甘特图

如图2.12那样，以实部为横轴、虚部为纵轴，则在直角坐标系上一个点就表示一个复数。也就是在复平面上可用图形表示复数，这样的图称为阿甘特（Argand）图。

将图2.8(a)所示的矢量X在x到y轴上投影，即将式（a）及（b）代入式（c）中，有

$$z=X[\cos(\bar{\omega}t+\phi)+\mathrm{i}\sin(\bar{\omega}t+\phi)] \tag{d}$$

一般地，利用所谓欧拉（Euler）公式

$$\left.\begin{aligned} e^{+\mathrm{i}\theta}&=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\\ e^{-\mathrm{i}\theta}&=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

或其逆表达式

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta&=\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

则由（2.24）式可将式（d）变为

$$z=Xe^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t+\phi)} \tag{e}$$

因而式（d）或其简明写法（e）所表示的复数表达了矢量X。而且此复数的幅角为$\bar{\omega}t+\phi$，具有角速度$\bar{\omega}$并随时间而增大，因而是一个转动矢量。又因$\mathscr{R}(z)=X\cos(\bar{\omega}t+\phi)$，$\mathscr{I}(z)=X\sin(\bar{\omega}t+\phi)$，复数$z$的实部与虚部都表示谐和振动，故复数也能表示谐和振动。具体用复数来表示式（2.11）的单质点系自由振动时有

$$z=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\bar{\omega})^2}\,e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t+\phi)}$$

这里

$$\phi=\arctan(-\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)$$

式（2.11）为该复数的实部。

式（e）可以写为$z=Xe^{\mathrm{i}\phi}\cdot e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}$，此处

$$\bar{X}=Xe^{\mathrm{i}\phi} \tag{2.26}$$

为包括振幅及初相位的复数，称为复振幅。

设$\bar{X}$表示复位移振幅，复位移x用复数表示则成为

$$x=\bar{X}e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \tag{2.27}$$

再对时间t微分

$$\dot{x}=\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{X}e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \tag{f}$$

$$\ddot{x}=(\mathrm{i}\bar{\omega})^2\bar{X}e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \tag{g}$$

则$\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{X}$及$(\mathrm{i}\bar{\omega})^2\bar{X}$分别为复速度振幅及复加速度振幅。复数表示的谐和振动对时间微分相当于复振幅增加$\mathrm{i}\bar{\omega}$倍。又将$\theta=\pi/2$或$\theta=\pi$代人之，则由于$e^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}$，$e^{\mathrm{i}\pi}=-1$，式(f)及式(g)表示成

$$\dot{x}=\bar{\omega}\bar{X}e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t+\pi/2)} \tag{2.28}$$

$$\ddot{x}=\bar{\omega}^2\bar{X}e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t+\pi)} \tag{2.29}$$

可见乘虚数单位 i 相当于相位超前$\pi/2$，乘$\mathrm{i}\bar{\omega}$相当于振幅扩大$\bar{\omega}$倍，相位超前$\pi/2$。式(2.28)及（2.29）分别与式（2.21）及（2.22）相当。

用复变函数代替三角函数表示谐和振动，在振动分析理论中极为常用。这个方法表达简洁，数学处理方便。由式（2.24），例如$e^{\mathrm{i}\omega t}$可表示成

$$e^{\mathrm{i}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t$$

其实部与虚部都是三角函数，这时$e^{\mathrm{i}\omega t}$表示解为$\cos\omega t$，或为$\sin\omega t$，或同时表示两者。要注意取实部或取虚部必须一贯到底。即最初以$e^{\mathrm{i}\omega t}$的实部$\cos\omega t$表示解，则计算结果取实部与之对应。若最初取虚部，则取计算结果的虚部与之对应。即使在中间计算中包含复数运算，这种对应关系也不变。

2.2.6 能量表示

使具有弹簧常数k的弹簧产生变形，当位移为x时就必须作$\frac{1}{2}kx^2$的功。反之，弹簧产生位移x后，就蓄积了能对外部作功$\frac{1}{2}kx^2$的能量。这种能量称为应变能或势能。以速度$\dot{x}$运动的质量m具有对外部作$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$功的能量，称为动能。每种能量都是用对外部作功（单位：t·cm）的多少来度量。系统具有的势能及动能之和称为机械能。

不受外力作用时，系统的机械能总是保持不变，即能量守恒定律成立。或更广义来说，在外力作用下，能量守恒定律表现为外力作的功与系统的机械能增加量相等。但是，当系统内部具有耗能机构——即机械能被转换成热能等其它能量形式时，机械能守恒定律就不再成立了。能使机械能守恒的系统称为保守系统。前面讨论过的质点系部是保守系统，下节所要讲的有阻尼质点系便不是保守系统，而是一种非保守系统。

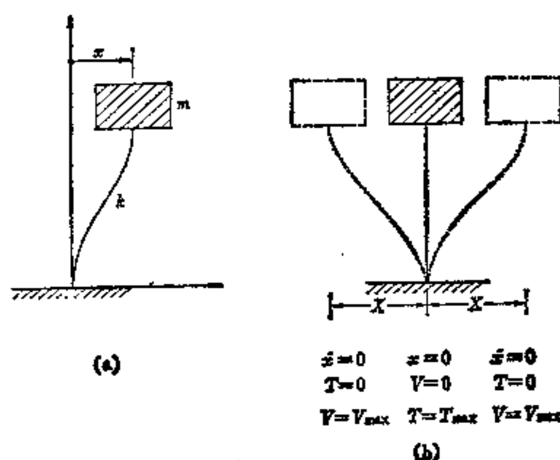


图2.13 单质点保守系统的振动

图2.13（a）表示质量为m、弹簧常数为k的单质点保守系统作自由振动，圆频率$\bar{\omega}$未知，设振动为谐和振动，则位移为

$$x=X\cos(\omega t+\phi) \tag{a}$$

只是这里并不像前面那样由初始条件确定振幅X及初相位ϕ。将式（a）对时间t微分得速度

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t + \phi) \tag{b}$$

则动能与势能分别为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{c}$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \tag{d}$$

代入式（a）及（b）有

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ V &= \frac{1}{2} k X^2 \cos^2(\omega t + \phi) \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

则机械能为

$$T + V = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k X^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

即

$$T + V = \frac{1}{2} X^2 [m\omega^2 + (k - m\omega^2)\cos^2(\omega t + \phi)] \tag{f}$$

或

$$T + V = \frac{1}{2} X^2 [k + (m\omega^2 - k)\sin^2(\omega t + \phi)] \tag{g}$$

根据能量守恒定律，无外力作用的自由振动有

$$T + V = \text{const} \equiv c \tag{2.30}$$

且与时间无关。为使式（f）或（g）成为与时间无关的量，应有$k - m\omega^2 = 0$，即圆频率$\omega = \sqrt{k/m}$，这与前面由运动微分方程所求得的圆频率$\bar{\omega}$一致。

同样的结果也可以如图2.13（b）所示，由考虑自由振动中质点达到最大振幅或平衡点时的能量大小而得到。质点在达到最大振幅时瞬间停止，然后反向运动。因此在该点时$\dot{x} = 0$，由式（c）知$T = 0$，又由式（2.30）知势能达到最大值

$$V = V_{max} \equiv c \tag{h}$$

在平衡点上$x = 0$，由式（d）知$V = 0$，又由式（2.30）有

$$T = T_{max} \equiv c \tag{i}$$

动能在该点为最大值，由式（h）及（i）可得

$$T_{max} = V_{max} \tag{j}$$

由式（e）可知$T_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$，$V_{max} = \frac{1}{2} k X^2$，代入式（j）可得$m\omega^2 = k$，即$\omega = \sqrt{k/m}$。

由以上可知，在自由振动中，系统中的机械能是在动能及势能间互相转换的。更广义地说，可以把振动定义为动能与势能这两种形式的能量互相转换的力学现象。

由式（c）及（d）与式（2.30），有$T + V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{const.}$，对时间 t 微分得 $m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$，即

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{k}$$

这就得到了由牛顿定律导出的自由振动微分方程。

进一步考虑速度$\dot{x}$为变量，将式（c）的动能对$\dot{x}$微分，再对时间t微分，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}\right)=m\ddot{x} \tag{l}$$

将式（d）的势能对坐标x微分，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=kx \tag{m}$$

将式（l）及式（m）代入式（k）中，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2.31}$$

这是自由振动方程的能量表达式。

2.3 有阻尼自由振动

到此为止所讨论的单质点系统自由振动，如图2.4所示，永远保持由初始条件决定的振幅持续不停。但是由经验可知，实际上任何自由振动的振幅都会随时间而衰减，经过一定时间后停止。这是因为系统的能量会因某些原因而消耗。这种由于系统的能量消耗而使运动衰减的现象称为衰减或阻尼。具有衰减现象的系统称为有阻尼系统。本节讨论带阻尼的单质点系统的自由振动。

2.3.1 阻尼模型

通常认为，引起能量消耗使建筑物振动衰减的原因是空气阻力、结构材料的粘性、构件接合部的摩擦和建筑物地基的影响等。微观地看，材料粘性是分子间的滑动摩擦。但引起衰减的机制还有许多不明瞭之处。这里暂且不计空气、地基等外因，而假设结构物内部有所谓阻尼器，以此代表产生衰减即阻尼的机制。

一般阻尼器是指在机械、测量仪器中给运动部分施加与速度成比例的阻力的装置。将它模型化，如图2.14所示，在盛有粘性流体的圆柱容器中放入活塞，给活塞以速度$\dot{x}$，设活塞半径为R，厚度为d，流体粘性系数为μ，活塞有小孔或与柱壁间有间隙。有小孔时设孔径为r，则作用在活塞上的阻力为$P=8\pi\mu d(R/r)^4\dot{x}$，有间隙时设间隙为$e$，则阻力为$P=6\pi\mu d(R/e)^3\dot{x}$。两种情况下阻力都与活塞速度$\dot{x}$成正比，写成$P=c\dot{x}$，则比例常数$c$称为阻尼系数，单位为t·s/cm。

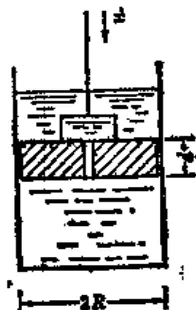


图2.14 阻尼器

阻力与速度成比例时的阻尼一般称为粘性阻尼。现设想在系统内部存在以阻尼器表示的粘性阻尼机制，这种阻尼系统称为内部粘性型。将具有阻尼系数c的内部粘性型质点系统用图示出，则对应于图2.1（a）、（c）、（e）及（f），可分别画成图2.15（a）、（b）、（c）及（d），其中（b）、（c）、（d）中画出了阻尼器与弹簧并列的简图。

实际结构物的阻尼运动特性并不能完全由内部粘性型模型表达。只是它能在相当程度上说明阻尼特征，且如下节所示，这时带阻尼项的微分方程是线性的，数学处理很方便，因而在通常的振动分析中已成为常用的模型。

关于阻尼还有其它许多复杂的问题，第七章还要再次涉及。

2.3.2 运动方程式及其解

只考虑图2.15所示单质点阻尼系统的位移x，这里

m：	质量	（单位：$t\cdot s^2/cm$）
k：	弹簧常数	（单位：t/cm）
c：	阻尼系数	（单位：$t\cdot s/cm$）
x：	位移	（单位：cm）

如图1.1（b）规定，位移x、速度$\dot{x}$、加速度$\ddot{x}$及力都以指向右为正，惯性力为$-ma=-m\ddot{x}$。

这里的作用力是与位移成正比的恢复力kx及与速度成正比的阻尼器阻力$c\dot{x}$，方向都向左，故力$P=-kx-c\dot{x}$，式（1.2）成为$-m\ddot{x}-c\dot{x}-kx=0$，即

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \tag{2.32}$$

或以m除之，与式（2.15）相同，设

$$k/m=\bar{\omega}^2 \tag{2.33}$$

并设

$$c/m=2h\bar{\omega} \tag{2.34}$$

则可写成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=0 \tag{2.35}$$

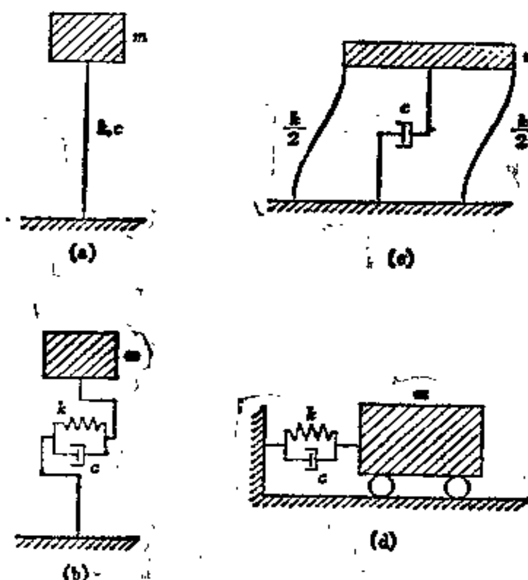


图2.15 单质点阻尼模型

式（2.35）是无外力作用时单质点阻尼系统的运动方程。式中$\bar{\omega}$如式（2.15）所示，是无阻尼的单质点系统即单质点无阻尼系统的固有圆频率。式（2.34）导入的系数h无量纲，它的物理意义后面再加以说明。式（2.32）中的$c\dot{x}$或式（2.35）中的$2h\bar{\omega}\dot{x}$称为阻尼项。

运动方程（2.35）是位移时间函数x的线性常系数二阶齐次常微分方程，如前所述有两个线性无关解，通解用e^{pt}型表示。设两个解是e^{p_1t}及e^{p_2t}（$p_1\neq p_2$），则式（2.7）的朗斯基行列式为

$$W(t)=(p_1-p_2)e^{(p_1+p_2)t}\neq 0$$

故两个解线性无关。现假定解为e^{pt}型，代入式（2.35）中有$Ce^{pt}(p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2)=0$，即

$$p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2=0 \tag{2.36}$$

如下节所述，这个代数方程的根决定了运动状态及特性。在这个意义上称式（2.36）为特征方程。实际上解特征方程的解为

$$p_{1,2}=-h\bar{\omega}\pm\bar{\omega}\sqrt{h^2-1} \tag{2.37}$$

或由式（2.33）及（2.34）可写成

$$p_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}} \tag{2.38}$$

确定出p_1及p_2后，式（2.35）的通解为线性无关的两个特解e^{p_1t}和e^{p_2t}的线性组合

$$x=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t} \tag{2.39}$$

这里C_1和C_2是积分常数。由$t=0$时的初始条件确定。

2.3.3 临界阻尼

式（2.37）给出了特征方程的根，式中根号内的值h^2-1为正、零或负时，将使系统的运动特征大不一样。下面分别不同情况作简单考察。

（1）当$h^2-1>0$时：

设特征方程（2.37）的两个根为

$$\left.\begin{aligned}p_1&=-\bar{\omega}(h-\sqrt{h^2-1})\\p_2&=-\bar{\omega}(h+\sqrt{h^2-1})\end{aligned}\right\}$$

两者均为负数，$p_2<p_1<0$，因而微分方程（2.35）的通解就是前面的式（2.39），即$x=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}$，与时间$t$有关的指数函数中指数为负实数，故$t\to\infty$时收敛于零。

给定初始条件为初始位移x_0及初始速度为$\dot{x}_0$，即

$$\left.\begin{aligned}x(0)&=x_0\\\dot{x}(0)&=\dot{x}_0\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

则积分常数为$C_1=(-p_2x_0+\dot{x}_0)/(p_1-p_2)$，$C_2=(p_1x_0-\dot{x}_0)/(p_1-p_2)$，故位移为

$$\frac{x}{x_0}=\frac{e^{-h\bar{\omega}t}}{2\sqrt{h^2-1}}\left[\left(h+\sqrt{h^2-1}+\frac{\dot{x}_0}{\bar{\omega}x_0}\right)e^{\sqrt{h^2-1}\,\bar{\omega}t}-\left(h-\sqrt{h^2-1}+\frac{\dot{x}_0}{\bar{\omega}x_0}\right)e^{-\sqrt{h^2-1}\,\bar{\omega}t}\right]\tag{b}$$

或引用关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}&=\cosh\theta\\\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}&=\sinh\theta\end{aligned}\right\}$$

可更一般地表示成

$$x/x_0=e^{-h\bar{\omega}t}[\cosh\sqrt{h^2-1}\,\bar{\omega}t+(h+\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)/\sqrt{h^2-1}\cdot\sinh\sqrt{h^2-1}\,\bar{\omega}t]\tag{c}$$

式（b）或（c）所表示的时间函数$x(t)$在$\dot{x}_0/x_0>0$或$\dot{x}_0/x_0<p_2$时只有一个极值，$p_2\leqslant\dot{x}_0/x_0\leqslant0$时无极值。且$\dot{x}_0/x_0>0$时极值与$x_0$同号，$\dot{x}_0/x_0<p_2$时异号。所以系统的运动随初始值$x_0$及$\dot{x}_0$的不同而有如图2.16所示的三种状态。即

（Ⅰ）$\dot{x}_0/x_0>0$：位移先增大，达到极大值后逐渐趋于零。

（Ⅱ）$p_2\leqslant\dot{x}_0/x_0\leqslant0$：位移从开始就单调减小，逐渐趋于零。

（Ⅲ）$\dot{x}_0/x_0<p_2$：位移先越过平衡点，在另一侧达到极大值。然后趋近于零。

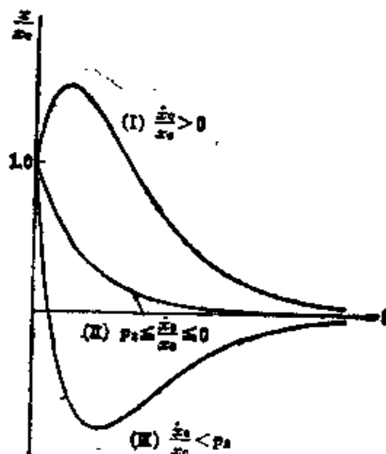


图2.16　过阻尼运动的三个状态

不管哪一种情况都没有围绕平衡轴来回正负摆动的现象，运动是非周期的。条件$h^2-1>0$由式（2.35）及（2.34）可写为

$$(c/2m)^2>k/m\tag{d}$$

这相当于式（2.38）中根号内为正数，式（d）的物理意义是阻尼机制的作用比弹簧作用要强，这种状态的阻尼称为过阻尼。

（2）当$h^2-1=0$时：

特征方程式（2.36）有相等的负实数根

$$p_1=p_2=-\bar{\omega}=p<0$$

微分方程（2.35）的通解为$x=(C_1+C_2t)e^{pt}$，初始条件同式（a），积分常数为$C_1=x_0, C_2=-px_0+\dot{x}_0$，位移为

$$x/x_0=[1+(1+\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)\bar{\omega}t]e^{-\bar{\omega}t} \tag{e}$$

式（e）可以从式（c）取$h\to 1$时的极限得到，因此式（e）表示的运动特征与h^2-1的情况几乎相当。由给定的初始值不同而对应于（Ⅰ）$\dot{x}_0/x_0>0$，（Ⅱ）$p\leq\dot{x}_0/x_0\leq 0$，（Ⅲ）$\dot{x}_0/x_0<p$三种情况，运动状态也分别同图2.16所示的三种形式一样。就是说这时运动也是非周期的。条件$h^2-1=0$由式（2.33）及（2.34）可写成

$$(c/2m)^2=k/m \tag{f}$$

这意味着弹簧反力与阻尼力正好平衡。

（3）当$h^2-1<0$时：

特征方程根的表达式（2.37）的根号内为负，两个根为

$$p_{1,2}=-h\bar{\omega}\pm i\bar{\omega}\sqrt{1-h^2} \tag{2.40}$$

是共轭复数。代入式（2.39）中，通解为

$$x=C_1e^{-h\bar{\omega}t+i\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t}+C_2e^{-h\bar{\omega}t-i\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t}$$
$$=e^{-h\bar{\omega}t}(C_1e^{i\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t}+C_2e^{-i\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t})$$

引用式（2.24）的欧拉公式$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$，有

$$x=e^{-h\bar{\omega}t}[(C_1+C_2)\cos\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t+i(C_1-C_2)\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t]$$

由于位移是有物理意义的实数，而积分常数C_1和C_2是任意的，所以C_1+C_2和$i(C_1-C_2)$都是实数，就是说C_1和C_2必须是共轭复数。这里改写成$C_1+C_2=A$，$i(C_1-C_2)=B$，则式（2.35）的通解为

$$x=e^{-h\bar{\omega}t}(A\cos\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t+B\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t) \tag{2.41}$$

由式（2.33）及（2.34），条件$h^2-1<0$可写成$(c/2m)^2<k/m$。即阻尼力比弹簧反力小时，在位移即式（2.41）中包含谐和振动项$\cos\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t$和$\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t$，表示运动是周期性的。这种在阻尼力作用下的周期性运动称为阻尼振动。

上述内容可以归纳为（1）$h^2-1>0$，$(c/2m)^2>k/m$时，系统处于过阻尼状态，只能作非周期性运动，（3）$h^2-1<0$，$(c/2m)^2<k/m$时，系统作周期性的阻尼振动，（2）$h^2-1=0$，$(c/2m)^2=k/m$时，系统正好处于周期性及非周期性运动的边界。这种正处于边界状态的阻尼称为临界阻尼。

表示临界阻尼状态的阻尼系数即临界阻尼系数记为c_{cr}，由式（f）知$(c_{cr}/2m)^2=k/m$，因此有

$$c_{cr}=2\sqrt{mk} \tag{2.42}$$

由前面的式（2.34）有$c/m=2h\bar{\omega}$，由式（2.33）及（2.42）得$h=c/2m\bar{\omega}=c/2m\sqrt{k/m}=c/(2\sqrt{mk})$，即

$$h=c/c_{cr} \tag{2.43}$$

因此系数h是系统实际的阻尼系数c与临界阻尼系数c_{cr}之比，h称为临界阻尼比，或阻尼

常数（本书中简称阻尼比——译者注）。它是无量纲量，大多按百分数计，具有以下各种表示方法：

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{c}{2m\bar{\omega}} \\ h &= \frac{c}{2\sqrt{mk}} \\ h &= \frac{c\bar{\omega}}{2k} \\ h &= \frac{\pi c}{kT} \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

2.3.4 振动特性

通常的结构物并不显示出有过阻尼或临界阻尼，往往阻尼比 $h<1$，而且比1小得多，即

$$h \ll 1 \tag{2.45}$$

因此以后只专门讨论前节中 $h^2-1<0$ 的情况。

这时如特征方程（2.36）或（2.40）所示，有两个共轭复数根，运动方程 $\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=0$ （$\bar{\omega}=\sqrt{k/m}$）的位移通解如式（2.41）所示

$$x=e^{-h\bar{\omega}t}(A\cos\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t+B\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t) \tag{2.46}$$

这里 A、B 为由初始条件确定的积分常数。由式（2.46）得速度为

$$\dot{x}=\bar{\omega}e^{-h\bar{\omega}t}[(-hA+\sqrt{1-h^2}B)\cos\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t-(\sqrt{1-h^2}A+hB)\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t] \tag{2.47}$$

（1）初始条件：$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$

令式（2.46）及（2.47）中 $t=0$，得 $A=x_0$，$B=(hx_0+\dot{x}_0/\bar{\omega})/\sqrt{1-h^2}$，式（2.46）成为

$$x=e^{-h\bar{\omega}t}\left[x_0\cos\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\frac{hx_0+\dot{x}_0/\bar{\omega}}{\sqrt{1-h^2}}\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t\right] \tag{2.48}$$

或写成

$$x=Xe^{-h\bar{\omega}t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\phi) \tag{2.49}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} X&=x_0\sqrt{1+(h+\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)^2/(1-h^2)} \\ \phi&=\arctan[-(h+\dot{x}_0/\bar{\omega}x_0)/\sqrt{1-h^2}] \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

式（2.49）表示振幅为 $Xe^{-h\bar{\omega}t}$、频率为 $\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}$ 的振动，振幅随时间按指数曲线减小，这时频率

$$\bar{\omega}_d=\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega} \tag{2.50}$$

称为有阻尼固有圆频率。同时

$$T_d=2\pi/\bar{\omega}_d=(2\pi/\bar{\omega})/\sqrt{1-h^2} \tag{2.51}$$

即

$$T_d=T/\sqrt{1-h^2} \tag{2.52}$$

称为有阻尼固有周期。式（2.52）中的 $\bar{\omega}$ 和 T 都是式（2.15）及（2.16）所示无阻尼时的固有圆频率及固有周期，在需要与有阻尼情形相区别时，可分别称为无阻尼固有圆频率和无阻尼固有周期。与有阻尼固有圆频率及有阻尼固有周期对应的振幅衰减比例 $e^{-h\bar{\omega}t}$ 只与系统固有

的常数 m，c，k 有关，而与初始条件无关。

由式（2.50）及（2.52）可知，有阻尼的固有频率减小，固有周期加长。现将有阻尼与无阻尼的频率比值 $\bar{\omega}_d/\bar{\omega}$ 和阻尼比 h 的关系 $\bar{\omega}_d/\bar{\omega}=\sqrt{1-h^2}$ 画在图上，则如图2.17所示。在 h 从零到相当大（$h>0.2$）的范围内，阻尼对固有频率的影响可以忽略。这意味着对于通常结构物的阻尼值，当只讨论系统的固有振动时可以不必特别考虑阻尼。

【例题2.4】 $m=0.055\mathrm{t\cdot s^2/cm}$，$k=120\mathrm{t/cm}$，阻尼比 $h=20\%$，计算单质点阻尼系统的各振动特性。

〔解〕由例题2.1可得

无阻尼固有圆频率　$\bar{\omega}=46.71\mathrm{rad/s}$

无阻尼固有周期　$T=0.134\mathrm{s}$

无阻尼固有频率　$\bar{\nu}=7.43\mathrm{Hz}$

由阻尼比 $h=0.20$ 得 $\sqrt{1-h^2}=0.9798$，由式（2.50）及（2.52）可得

有阻尼固有圆频率　$\bar{\omega}_d=\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}=0.9798\times46.71=45.77\mathrm{rad/s}$

有阻尼固有周期　$T_d=T/\sqrt{1-h^2}=0.134/0.9798=0.137\mathrm{s}$

有阻尼固有频率　$\bar{\nu}_d=1/T\quad=1/0.137\quad=7.30\mathrm{Hz}$

求这时的阻尼系数 c，可由式（2.34）得

$$c=2hm\bar{\omega}=2\times0.20\times0.055\times46.71=1.028\mathrm{t\cdot s/cm}$$

（2）初始条件：$x(0)=x_0$，$\dot{x}_0=0$

由式（2.48）得

$$x=x_0e^{-h\bar{\omega}t}(\cos\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+h/\sqrt{1-h^2}\cdot\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t)\tag{2.53}$$

或由式（2.49）及式(a)有

$$x=\frac{x_0}{\sqrt{1-h^2}}e^{-h\bar{\omega}t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\phi)\tag{2.54}$$

式中

$$\phi=\arctan(-h/\sqrt{1-h^2})\tag{2.55}$$

位移的时程如图2.18中实线所示。

图中的虚线表示振幅的变化

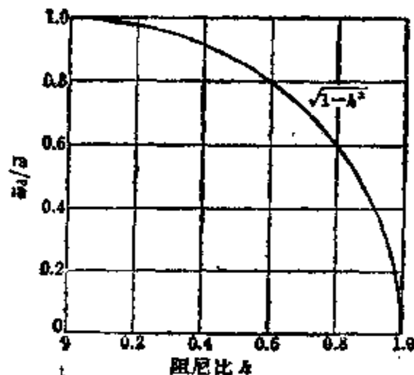


图2.17　频率与阻尼比的关系

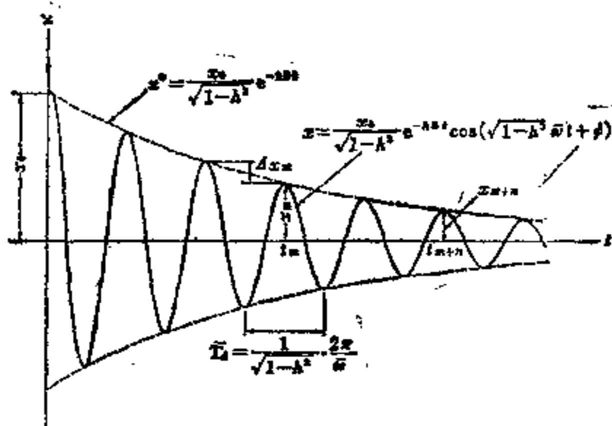


图2.18　有阻尼自由振动：初始条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$

$$x^{*}=(x_0/\sqrt{1-h^2})e^{-h\bar{\omega}t} \quad \text{(b)}$$

式（2.54）中$|\cos(\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t+\phi)|\leqslant 1$，故$|x|\leqslant x^{*}$，因此实线即振动曲线不会越过虚线。对正例的虚线来说，每当$\cos(\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t+\phi)=1$时，式（2.54）的振动曲线与之相接，式（b）的曲线$x^{*}(t)$是包络线。任意相邻接点间的时间间隔等于系统的有阻尼固有周期。

式（2.53）对时间t微分得质点速度$\dot{x}=-(\bar{\omega}x_0/\sqrt{1-h^2})e^{-h\bar{\omega}t}\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t$，振动曲线的峰值在每逢速度为零，即$\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t=0$时出现，将满足该式的$t$记为$t_m$，则

$$\bar{\omega}t_m=2m\pi/\sqrt{1-h^2} \qquad m=0,\ 1,\ 2\cdots \quad \text{(c)}$$

因而相邻两峰值间的时间间隔仍是有阻尼固有周期$(2\pi/\bar{\omega})/\sqrt{1-h^2}$，将式(c)代入式(2.53)，峰值振幅$x_m$为

$$x_m=x_0e^{-2m\pi h/\sqrt{1-h^2}} \qquad m=0,\ 1,\ 2\cdots \quad (2.56)$$

随有阻尼自由振动峰值与包络线的接点逐个出现，振幅也逐渐略有差别。但是在$h<0.2$的范围内，这种差异几乎可以忽略不计。

【例题2.5】 对例题2.4的质点给以初始位移$x=0.25$cm，初始速度为零，求释放后的位移时程。

〔解〕式(2.53)中$h\bar{\omega}=0.20\times 46.71=9.342(1/s)$，$h/\sqrt{1-h^2}=0.20/0.9798=0.204$，故

$$x=0.25e^{-9.342t}(\cos 45.77t+0.204\sin 45.77t)\text{cm}$$

或由式（2.54）及（2.55）得

$$x_0/\sqrt{1-h^2}=0.25/0.9798=0.255(\text{cm})$$

$$\phi=\arctan(-h/\sqrt{1-h^2})=\arctan(-0.204)=-0.201(\text{rad})$$

因而

$$x=0.255e^{-9.342t}\cos(45.77t-0.201)\text{cm}$$

【例题2.6】 求例题2.5位移时程上第1和第3峰值。

〔解〕$x_0=0.25$(cm)，$h/\sqrt{1-h^2}=0.204$，因而在式（2.56）中令$m=1$，3则有

$$x_1=0.25e^{-2\pi\times 0.204}=0.25\times 0.2775=0.0694\text{ cm}$$

$$x_3=0.25e^{-6\pi\times 0.204}=0.25\times 0.02138=0.0053\text{ cm}$$

（3）初始条件：$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$

在式（a）中代入$x_0=0$，$X=\dot{x}_0/(\bar{\omega}\sqrt{1-h^2})$，$\phi=3\pi/2$，式（2.49）为$x=\dot{x}_0/(\bar{\omega}\times\sqrt{1-h^2})\cdot e^{-h\bar{\omega}t}\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t$，或由式（2.50）有

$$\frac{x}{(\dot{x}_0/\bar{\omega}_d)}=e^{-h\bar{\omega}t}\sin\bar{\omega}_dt \quad (2.57)$$

当$h=0.02$，0.05，0.1时的位移时程绘于图2.19，阻尼比越大，振动结束越快。

式（2.57）对时间t微分得速度时程，再微分得加速度时程，分别为

$$\frac{\dot{x}}{(\dot{x}_0/\bar{\omega}_d)}=e^{-h\bar{\omega}t}(-h\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_dt+\bar{\omega}_d\cos\bar{\omega}_dt) \quad (2.58)$$

$$\frac{\ddot{x}}{(\dot{x}_0/\bar{\omega}_d)}=-\bar{\omega}_d^2e^{-h\bar{\omega}t}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_dt+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_dt\right] \quad (2.59)$$

2.3.5 对数衰减率

如图2.19所示，阻尼比越大，有阻尼振动系统位移减小的比例越大。两者间应当有定量关系，本节所述的对数衰减率简明地表达了这一关系。

图2.18所示振动曲线的峰值x_m，也就是式（2.56），即

$$x_m = x_0 e^{-2m\pi h/\sqrt{1-h^2}} \quad m=0,1,2\cdots \text{(a)}$$

因而在此峰值后面的第n个峰值为

$$x_{m+n} = x_0 e^{-2(m+n)\pi h/\sqrt{1-h^2}} \quad \text{(b)}$$

式(a)与(b)之比是 $x_m/x_{m+n}=e^{n\cdot 2\pi h/\sqrt{1-h^2}}$，对两边取自然对数得 $\ln(x_m/x_{m+n})=n\cdot 2\pi h/\sqrt{1-h^2}$。再除以这两个峰值间振动次数$n$，即得

$$\delta=\frac{1}{n}\ln(x_m/x_{m+n})=2\pi h/\sqrt{1-h^2} \quad (2.60)$$

称为对数衰减率。取两相邻峰值之比时有$n=1$，则

$$\delta=\ln(x_m/x_{m+1})=2\pi h/\sqrt{1-h^2} \quad \text{(c)}$$

相邻峰值振幅之比x_m/x_{m+1}亦称为衰减率。

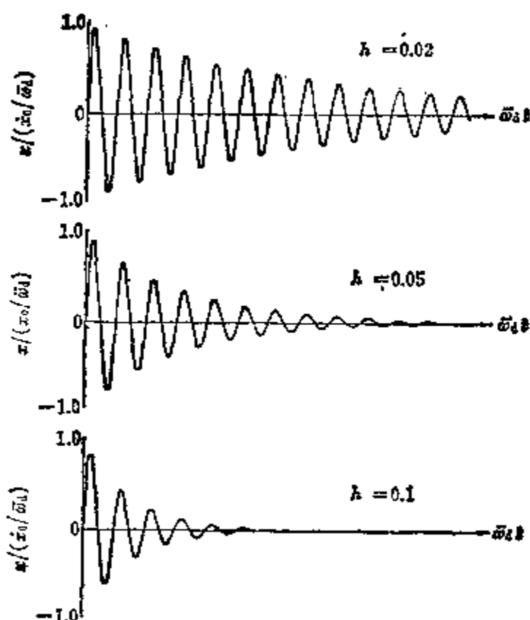


图2.19　有阻尼自由振动，初始条件$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$

由式（2.60）及式（c）可见，$\delta=2\pi h/\sqrt{1-h^2}$，当阻尼比$h$比1小得多时，$\sqrt{1-h^2}\doteq 1$，因此

$$\delta \doteq 2\pi h \quad (2.61)$$

或$h\doteq\delta/2\pi$。式（2.60）与近似式（2.61）的差异如图2.20所示，在$h<0.2$的范围内几乎没有什么问题。

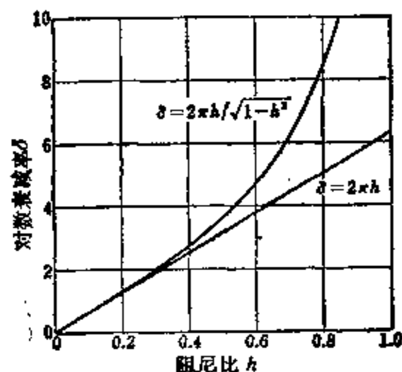


图2.20　对数衰减率和阻尼比

在小阻尼时，如图2.18所示，设某峰值振幅x_m比前一个峰值减少Δx_m，由式（c）可知

$$\delta=\ln(x_{m-1}/x_m)=\ln[(x_m+\Delta x_m)/x_m]=\ln(1+\Delta x_m/x_m)$$
$$=\Delta x_m/x_m-\frac{1}{2}(\Delta x_m/x_m)^2+\cdots$$

即

$$\delta\doteq\Delta x_m/x_m \quad (2.62)$$

表明对数衰减率近似等于振动一周内振幅减少的比率。

【例题2.7】由例题2.6求得的峰值振幅求对数衰减率及阻尼比。

〔解〕$x_1=0.0694$(cm)，$x_3=0.0053$(cm)，由式（2.60）得对数衰减率为

$$\delta=\frac{1}{3-1}\ln(0.0694/0.0053)=\frac{1}{2}\ln 13.09=\frac{1}{2}\times 2.572=1.286$$

由式（2.61）得阻尼比为

$$h=\delta/2\pi=1.286/2\pi\doteq 0.20$$

2.3.6 复数与矢量表示

前面已经介绍过，式（2.13）表示的无阻尼系统振动 $x=X\cos(\bar{\omega}t+\phi)$，可用一定长度X和一定角速度$\bar{\omega}$的转动矢量表示，如图2.8（a）所示。这时矢量的端点描出半径为X的圆。

有阻尼系统的运动方程式为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \tag{a}$$

或

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=0 \tag{b}$$

其解为式（2.49）有阻尼自由振动 $x=Xe^{-h\bar{\omega}t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\phi)$，可以用长为$Xe^{-h\bar{\omega}t}$，角速度为$\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}$的转动矢量表示。

这时角速度虽仍固定，但比无阻尼系统的要慢。且矢量的长度随时间而缩小，随着重复转动而向原点收缩，即矢量端点描出内卷的对数螺线。

式（2.13）的振动可用形如 $z=Xe^{i(\bar{\omega}t+\phi)}$的复数表示。同样，有阻尼自由振动也可以用复数 $z=Xe^{-h\bar{\omega}t}\cdot e^{i(\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\phi)}$

或用

$$z=Xe^{(-h+i\sqrt{1-h^2})\bar{\omega}t+\phi} \tag{c}$$

来表示。式（c）的实部即阿甘特图上向横轴投影的长度式(2.49)，同时式(c)的虚部为向纵轴的投影长$Xe^{-h\bar{\omega}t}\sin(\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\phi)$，也是微分方程（b）的解。

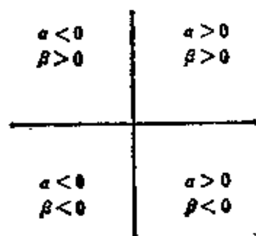


图2.21　幅角θ的象限

若与式（2.26）相同用复振幅$\bar{X}=Xe^{i\phi}$表示复位移x，则式（c）为

$$x=\bar{X}e^{(-h+i\sqrt{1-h^2})\bar{\omega}t} \tag{d}$$

这时 e 的指数的实部为振幅的衰减，虚部表示圆频率。

将式（d）对时间 t 微分，可得速度

$$\dot{x}=\bar{\omega}\bar{X}(-h+i\sqrt{1-h^2})e^{(-h+i\sqrt{1-h^2})\bar{\omega}t} \tag{e}$$

一般复数$\alpha+i\beta$可表为

$$\alpha+i\beta\equiv\rho e^{i\theta}$$

由欧拉公式（2.24），有$\rho e^{i\theta}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，于是

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\\ \theta&=\arctan(\beta/\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

对应于α和β的正负不同，幅角θ分别在图2.21中的四个不同象限。

由式（2.63）及（2.64），式（e）中的$-h+i\sqrt{1-h^2}$写成

$$-h+i\sqrt{1-h^2}=e^{i[\pi/2+\arctan(h/\sqrt{1-h^2})]}$$

所以式（e）变为

$$\dot{x}=\bar{\omega}\bar{X}e^{(-h+i\sqrt{1-h^2})\bar{\omega}t+i[\pi/2+\arctan(h/\sqrt{1-h^2})]} \tag{f}$$

比较式（d）与式（f）可知，有阻尼自由振动对时间 t 一次微分后，振幅增加 $\bar{\omega}$ 倍，相位超前 $(\pi/2)+\arctan(h/\sqrt{1-h^2})$。对式（f）再微分一次得加速度

$$\ddot{x}=\bar{\omega}^2 X e^{(-h\pm i\sqrt{1-h^2})\bar{\omega}t\pm i(\pi\pm 2\arctan(h/\sqrt{1-h^2}))} \tag{g}$$

将式（d）、（f）及（g）表示的位移、速度和加速度在阿甘特图上用转动矢量表示，则如图2.22（a）所示。弹簧恢复力、阻尼器的阻尼力及作用在质点上的惯性力分别与位移、速度和加速度反向作用。用矢量表示则如图2.22（b）所示。这三个力如图（c）那样形成等腰三角形的封闭力多边形。只是图2.22中各矢量表示的是除阻尼项 $e^{-h\bar{\omega}t}$ 外的振幅。图2.22(c)所表示的力平衡关系只是式（a）所表示的动力平衡条件用矢量来表达而已。

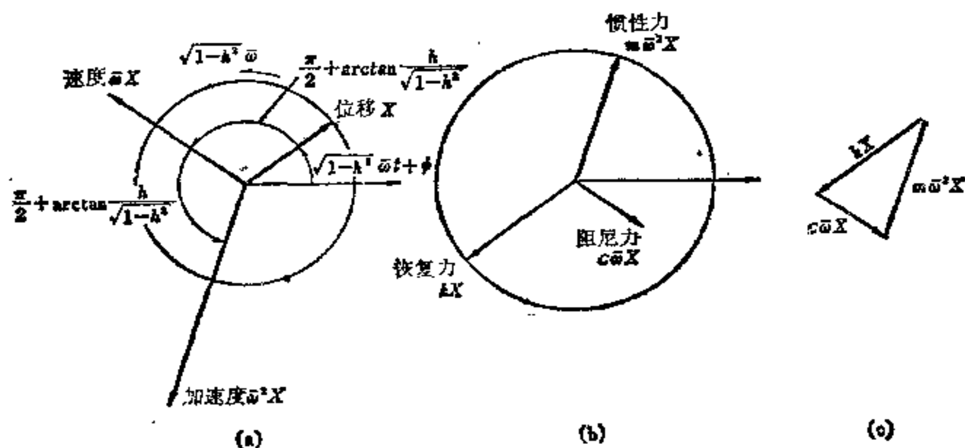


图2.22　有阻尼自由振动的矢量表示

2.3.7 能量表示

设质点振幅为 x，速度为 $\dot{x}$，则动能 T 和势能 V 分别为

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ V &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

对2.2.6节所述的保守系统，两者之和即机械能总是常数，即 $T+V=\text{const}$. 有阻尼时因阻尼作用而消耗能量，这时机械能守恒定律不成立。

在有阻尼自由振动中，达到峰值振幅 $x=x_m$ 时 $\dot{x}=0$，动能为零，系统的机械能都是势能。这时势能为 $V_1=\frac{1}{2}kx_m^2$，如图2.18所示，设到下一个峰值间振幅减少 Δx_m，则下一个峰值对应的势能为 $V_2=\frac{1}{2}k(x_m-\Delta x_m)^2$，因此一周内能量消耗为 $\Delta V=V_1-V_2=\frac{1}{2}kx_m^2-\frac{1}{2}k(x_m-\Delta x_m)^2$，将它除以原有能量得 $\Delta V/\Delta V_1$ 称为能量损耗比，其值 ψ 为

$$\psi=\frac{\frac{1}{2}kx_m^2-\frac{1}{2}k(x_m-\Delta x_m)^2}{\frac{1}{2}kx_m^2}=2\left(\frac{\Delta x_m}{x_m}\right)-\left(\frac{\Delta x_m}{x_m}\right)^2$$

在小阻尼时，相对振幅减少的比率 $\Delta x_m/x_m$ 的二次项可以忽略，则 $\psi=2(\Delta x_m/x_m)$，与式(2.62)

相比，能量损耗比与对数衰减率间有如下关系

$$\psi = 2\delta \tag{2.65}$$

再由式(2.61)得

$$h = \frac{1}{4\pi}\psi \tag{2.66}$$

由式(2.43)看到，阻尼比的定义是系统实际上具有的阻尼系数与临界阻尼系数之比，而由式(2.66)，阻尼比也可以理解为能量损耗比的$1/4\pi$。

根据§2.3.1所述的内部粘性假定，阻尼器的阻力以$c\dot{x}$表示，该力在质点微小位移dx上所作的功为$c\dot{x}dx$。这个功表示在形成位移dx的过程中由于阻尼作用而损耗的能量，设到某时刻为止所损耗的能量记为W_d，则

$$W_d = \int c\dot{x}\mathrm{d}x = \int_0^t c\dot{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^t c\dot{x}^2\mathrm{d}t \tag{2.67}$$

本书中到现在为止所假定的有阻尼系统中，除阻尼器外无其它能量损耗。因此除系统的机械能$T+V$以外，加上考虑损耗的能量部分，总能量仍保持不变，即$T+W_d+V=\mathrm{const}$，或由式(2.67)及式(a)有

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^t c\dot{x}^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}kx^2 = \mathrm{const}$$

将此式对时间t微分，得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{b}$$

这就是单质点系有阻尼自由振动的微分方程。

定义由阻尼力引起的能量损失随时间变化率的$\frac{1}{2}$为$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}W_d}{\mathrm{d}t} = R$，由式(2.67)可得

$$R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \tag{2.68}$$

R是速度$\dot{x}$的函数，一般称为耗散函数或阻尼能。虽然称为阻尼能，但R却不具有能量的量纲。再以$\dot{x}$为自变量，由式(2.68)得

$$\mathrm{d}R/\mathrm{d}\dot{x} = c\dot{x} \tag{c}$$

又由式(a)得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} &= kx \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将式(c)及(d)代入式(b)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}\right) + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\dot{x}} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.69}$$

式(2.69)与无阻尼系统中的式(2.31)相对应，是有阻尼自由振动方程的能量表达式。

2.4 强迫振动

到上一节为止，所讨论的自由振动在给定初始位移或初始速度后，系统一旦开始运动，外部作用力或系统基底运动都消失，只是系统本身运动。与此相对，有时质点在外力作用或

基底作运动的情况下振动，这种振动是广义的强迫振动。外部作用可以是随时间任意变化的力，或是基底的运动，也可以是瞬间作用的冲击。这些外部作用总称为激振作用或激振，激振产生的系统运动一般称为反应，产生激振作用的外源称为扰动。

但是通常考虑的是使质点在谐和振动的规则外力$P(t)=P_0\sin\omega t$直接作用下的情形，这时系统的振动多称为强迫振动。乍一看来，这种狭义的强迫振动只不过是在特殊的激振力作用下的运动。然而如下面所述，由此对理解结构物振动的许多基本特性非常有用。而且后面要讲到，对于像地震作用这样的地面运动激振问题，可以还原为狭义强迫振动问题处理，复杂扰动的反应可以通过简单激振力反应的叠加表示。

到前节为止，仅讨论了自由振动，系统的固有圆频率用记号$\bar{\omega}$表示。与此对应，从下节开始，外部激振力的激振圆频率记为ω。激振圆频率与系统的无阻尼固有圆频率之比$\omega/\bar{\omega}$称为频率比，当然是无量纲的。

2.4.1 谐和激振

如图2.23所示，考察直接受正弦力$P(t)=P_0\sin\omega t$作用，即在谐和激振下单质点系有阻尼振动。对于建筑物，这相当于起振机放在单层建筑屋顶进行振动试验时的情形。

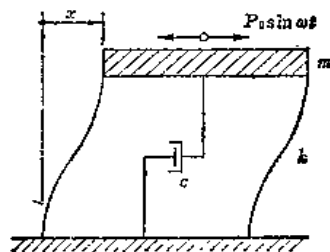


图2.23　单质点系的强迫振动

一般用$P(t)$表示对质点的作用力，如图2.23，作用力取向右为正，质点位移如图为x，则惯性力、阻尼器的阻尼力及弹簧恢复力都向左作用，它们的合力与$P(t)$平衡，即$P(t)-m\ddot{x}-c\dot{x}-kx=0$，或写成

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P(t) \tag{2.70}$$

现在有

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P_0\sin\omega t \tag{2.71}$$

这就是单质点阻尼系统的强迫振动运动方程。或者引用式(2.23)及(2.34)中无阻尼固有圆频率及阻尼比，即

$$\left.\begin{aligned}\bar{\omega}&=\sqrt{k/m}\\ h&=c/2\sqrt{mk}\end{aligned}\right\} \tag{2.72}$$

则式(2.71)变为

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\frac{P_0}{m}\sin\omega t \tag{2.73}$$

式(2.73)表示的线性微分方程右边不为零，是非齐次的。这样的微分方程通解由两部分组成，可表示成

$$x(t)=x_c+x_p \tag{2.74}$$

此处x_c表示在式(2.73)右边为零的齐次微分方程通解，称为原式(2.73)的余函数。x_p是原式(2.73)不含积分常数的特解。

x_c是微分方程(2.73)的齐次式即(2.35)的解，已经求得，在$h<1$时就是式(2.41)，即由

$$x_c=e^{-h\bar{\omega}t}(A\cos\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t+B\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t) \tag{a}$$

得到。式中A，B是由初始条件确定的积分常数。这个余函数表示系统按固有频率振动，运动随时间而衰减。振幅和相位取决于初始条件，系统以固有频率振动，并随时间而衰减，是在比较短的时间内回到平衡状态的暂时的运动，称为狭义的暂态振动。

求微分方程特解的方法有

i) 拉格朗日法

ii) 待定系数法

等。拉格朗日法可适用于非齐次微分方程的右边是任意函数、以及微分项的系数不是常数，而是自变量的函数等情形，数学上适用范围广。

待定系数法在以 t 为自变量时，只适用于方程右边是$t^p e^{\alpha t}$，$t^p e^{\alpha t}\cos\beta t$，$t^p e^{\alpha t}\sin\beta t$等函数或它们的线性组合的情形，此处 p 是正整数或零，α 和 β 是包括 0 在内的任意实数。但是在强迫振动问题中，右边的非齐次项常取这种形式，所以还是待定系数法适用的情况占多数。

为运用待定系数法，设式(2.73)的特解形如

$$x_p = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t \tag{2.75}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x_p &= \sqrt{C_1^2+C_2^2}\sin(\omega t-\phi)\\ \phi &= \arctan(-C_2/C_1)\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

C_1和C_2是待定系数，不是积分常数。二阶微分方程的两个积分常数已包含在式(a)的余函数x_c中。将式(2.75)代入式(2.73)并整理得

$$(-\omega^2 C_1 - 2h\bar{\omega}\omega C_2 + \bar{\omega}^2 C_1 - P_0/m)\sin\omega t + (-\omega^2 C_2 + 2h\bar{\omega}\omega C_1 + \bar{\omega}^2 C_2)\cos\omega t = 0$$

上式对任意 t 值都成立，所以要求

$$\left.\begin{aligned} (\bar{\omega}^2-\omega^2)C_1 - 2h\bar{\omega}\omega C_2 &= P_0/m\\ 2h\bar{\omega}\omega C_1 + (\bar{\omega}^2-\omega^2)C_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

同时成立。这是待定系数C_1和C_2的联立方程组，解之得

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\bar{\omega}^2-\omega^2}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}\cdot\frac{P_0}{m}\\ C_2 &= \frac{2h\bar{\omega}\omega}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}\cdot\frac{P_0}{m}\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式(c)代入式(2.75)得特解x_p

$$\left.\begin{aligned} x_p &= \frac{P_0/m}{\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega^2)+(2h\bar{\omega}\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi)\\ \phi &= \arctan[2h\bar{\omega}\omega/(\bar{\omega}^2-\omega^2)]\end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

分子与分母同除以$\bar{\omega}^2=k/m$得

$$\left.\begin{aligned} x_p &= \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+[2h(\omega/\bar{\omega})]^2}}\sin(\omega t-\phi)\\ \phi &= \arctan\frac{2h(\omega/\bar{\omega})}{1-(\omega/\bar{\omega})^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.77}$$

或者由式(2.72)用系统的常数m，c，k表示$\bar{\omega}$，h，写成

$$\left.\begin{aligned} x_p &= \frac{P_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi)\\ \phi &= \arctan[c\omega/(k-m\omega^2)]\end{aligned}\right\} \tag{2.78}$$

由式(2.74)，微分方程(2.73)的通解是式(a)的余函数与式(2.77)的特解之和

$$x(t) = e^{-h\bar{\omega}t}(A\cos\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t + B\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t) + \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+[2h(\omega/\bar{\omega})]^2}}\sin(\omega t-\phi) \tag{2.79}$$

如果系统从静止状态开始运动，即初始条件为$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$，则由式(2.79)及其对时间一次微分的速度表达式可求出积分常数A和B的值

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P_0}{m}\cdot\frac{2h\bar{\omega}\omega}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2} \\ B &= -\frac{P_0}{m}\cdot\frac{\omega/\bar{\omega}}{\sqrt{1-h^2}}\cdot\frac{\bar{\omega}^2-\omega^2-2h^2\bar{\omega}^2}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.80}$$

式(2.79)第一项表示以系统有阻尼固有频率振动的暂态振动，第二项表示随时间增加没有振幅递减的衰减现象，而是靠激振力保持一定的振幅，并以激振力的频率作稳态振动。暂态振动的振幅与相位按2.3.4节随初始条件而变，稳态振动的振幅和相位与初始条件无关。

式(2.80)表示，即使初始条件为$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$，也不会有$A=B=0$，就是说要注意即使系统从平衡位置以静止状态开始运动，也还会伴有暂态振动。

一般暂态振动与稳态振动合成的振动中，两者可能有许多不同的组合，所占比重各不相同。本章考虑通常的强迫振动，如图2.24所示，暂态振动迅速消失而只留下稳态振动，除振动刚开始部分外，可以忽略暂态振动。但是有些场合暂态振动非常重要，这类问题在第三章还要讨论。

2.4.2 动态放大倍数

在单质点阻尼系统的强迫振动中，当不考虑运动刚开始的暂态振动，而只讨论稳态振动时，其位移时程由式(2.79)表示。因而稳态振动的振幅为

$$X=\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+[2h(\omega/\bar{\omega})]^2}} \tag{2.81}$$

激振力振幅P_0产生的静位移

$$X_s=P_0/k \tag{a}$$

动力与静力振幅比为

$$\mu=X/X_s \tag{b}$$

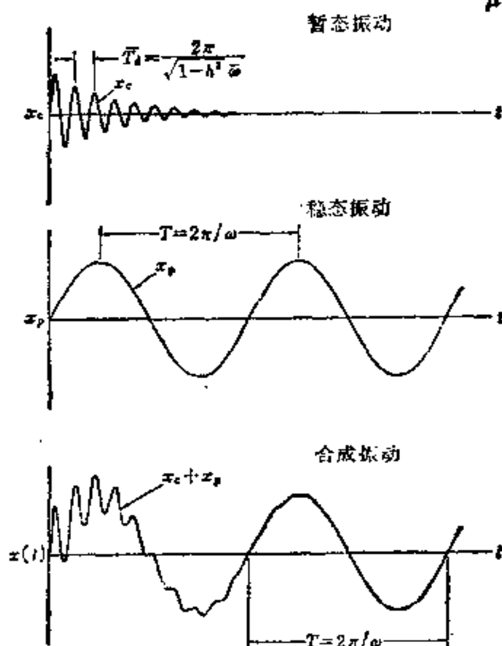


图2.24 强迫振动中的暂态振动与稳态振动

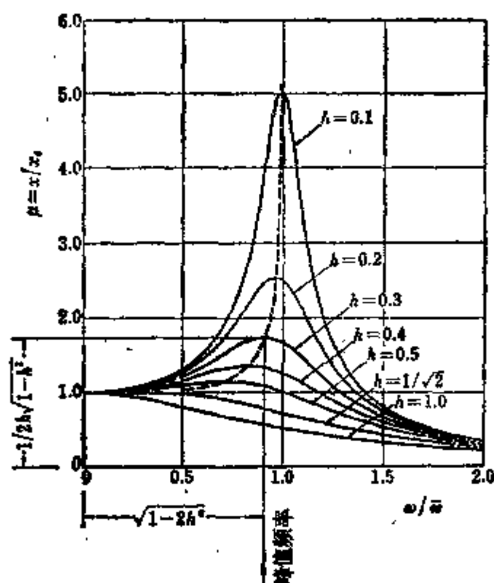


图2.25 动态放大倍数(共振曲线)

即
$$\mu=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+[2h(\omega/\bar{\omega})]^2}} \tag{2.82}$$

或由式(2.78)得
$$\mu=\frac{k}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \tag{2.83}$$

μ称为动态增幅率或动态放大倍数。

由式(2.82)，动态放大倍数只是频率比$\omega/\bar{\omega}$及阻尼比h的函数。以阻尼比h为参数，将动态放大倍数μ与频率比$\omega/\bar{\omega}$的关系绘于图2.25中。每条曲线在频率比的两个极限处都是：$\omega/\bar{\omega}=0$，$\mu=1$；$\omega/\bar{\omega}\to\infty$，$\mu=0$。

由式(2.82)，以$\omega/\bar{\omega}$为自变量，在$d\mu/d(\omega/\bar{\omega})=0$处可以求得动态放大倍数$\mu$的峰值$\mu_{max}$。实际上微分得$(\omega/\bar{\omega})[(\omega/\bar{\omega})^2-(1-2h^2)]=0$，则
$$\left.\begin{aligned}&\omega/\bar{\omega}=\sqrt{1-2h^2} && h\leqq 1/\sqrt{2}\\&\omega/\bar{\omega}=0 && h>1/\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \tag{2.84}$$
将式(2.84)代入式(2.82)得μ_{max}的值为
$$\left.\begin{aligned}&\mu_{max}=1/(2h\sqrt{1-h^2}) && h\leqq 1/\sqrt{2}\\&\mu_{max}=1 && h>1/\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

如图2.25所示，由式(2.84)或式(c)的第一式，在$h\leqslant 1/\sqrt{2}$时峰值点的坐标为
$$\left.\begin{aligned}&\omega/\bar{\omega}=\sqrt{1-2h^2)}\\&\mu=1/(2h\sqrt{1-h^2})\end{aligned}\right\}$$
由此消去h得
$$\mu=1/\sqrt{1-(\omega/\bar{\omega})^4} \tag{d}$$
这个方程式给出阻尼比变化时峰值点的轨迹。

当频率比为$\omega/\bar{\omega}=1$，即激振力与系统无阻尼固有频率一致时的振动状态称为共振。设此时振幅为X_{res}，将$\omega/\bar{\omega}=1$代入式(2.81)中
$$X_{res}=\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{2h} \tag{e}$$
或由式(2.82)得动态放大倍数为
$$\mu_{res}=1/2h \tag{2.85}$$
共振时的振幅X_{res}称为共振振幅。此外，图2.25所表示的动态放大倍数随包括共振点在内的频率比$\omega/\bar{\omega}$而变化的曲线也称为共振曲线。共振时$\omega/\bar{\omega}=1$，即$\omega=\bar{\omega}$，由式(2.72)第一式有
$$k-m\omega^2=0 \tag{2.86}$$

与共振振幅相对，达到μ_{max}时$\omega/\bar{\omega}$所对应的振幅称为峰值振幅，设峰值振幅为X_{max}，则由式(c)的第一式及式(a)与(b)有
$$X_{max}=\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}} \tag{f}$$
比较式(e)与(f)，或由图2.25可见，共振振幅与峰值振幅并非严格一致。由于两者之比为$\sqrt{1-h^2}$，如图2.17所示那样，在小阻尼$h<0.2$的范围内，不妨近似取为
$$X_{max}\doteqdot X_{res}=\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{2h} \tag{g}$$

由式(2.44)第三式，共振时有$2hk=c\omega$，代入式(g)有

$$X_{max}\doteq P_0/(c\omega) \tag{2.87}$$

由谐和激振力$P_0\sin\omega t$引起的质点稳态振动具有式(2.77)第一式所示的形式$x=X\sin(\omega t-\phi)$，与激振力之间仅有式(2.77)第2式所示的相位差

$$\phi=\arctan\frac{2h(\omega/\bar{\omega})}{1-(\omega/\bar{\omega})^2} \tag{2.88}$$

因此激振力与质点位移并不同时达到最大值，ϕ是第1或第2象限的角度，所以激振力的相位较位移超前。

由式(2.88)可见，相位差是阻尼比h及频率比$\omega/\bar{\omega}$的函数，其图形示于图2.26。由图或式(2.88)可知，共振时，即$\omega/\bar{\omega}=1$时，ϕ与h无关，而有

$$\phi=\pi/2 \tag{2.89}$$

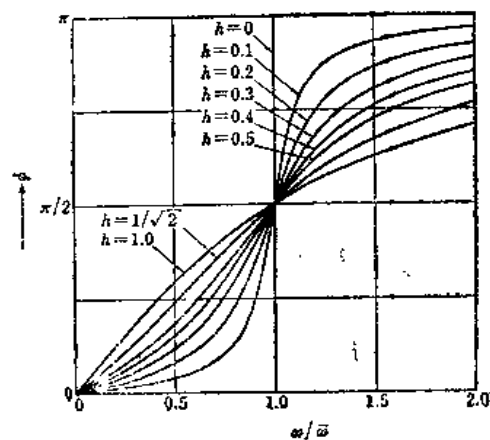


图2.26 激振力与位移间的相位差

【例题2.8】 设例题2.4的单质点阻尼系统受5Hz的谐和激振力作用，求动态放大倍数及系统与激振力共振时的动态放大倍数。

〔解〕 系统的无阻尼固有圆频率为$\bar{\omega}=46.71(\mathrm{rad/s})$，阻尼比$h=0.20$，激振力圆频率$\omega=2\pi\times5=31.42(\mathrm{rad/s})$，频率比$\omega/\bar{\omega}=31.42/46.71=0.673$，由式(2.82)得动态放大倍数

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{[1-(0.673)^2]^2+(2\times0.20\times0.673)^2}}=1.64$$

又由 $m=0.055(\mathrm{t\cdot s^2/cm})$，$c=1.028(\mathrm{t\cdot s/cm})$，$k=120(\mathrm{t/cm})$，因而根据式(2.83)得

$$\mu=\frac{120}{(120-0.055\times31.42^2)^2+(1.028\times31.42)^2}=1.64$$

共振时由式(2.85)得到

$$\mu_{res}=1/(2\times0.20)=25$$

这些数值都可以从图2.25上读取。

2.4.3 复数与矢量表示

频率为ω的谐和激振力可用复数$P_0e^{i\omega t}$表示。在受力作用下，单质点阻尼系统运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P_0e^{i\omega t} \tag{2.90}$$

式(2.71)是它的虚部。这里与前节一样只讨论稳态振动，如§2.4.1节所述，稳态振动表现为具有与激振力相同频率但却存在一定相位差的振动，因而可以假定式(2.90)的稳态解为

$$x=Xe^{i(\omega t-\phi)} \tag{2.91}$$

式(2.91)改写为

$$x=Xe^{-i\phi}e^{i\omega t}=\underline{X}e^{i\omega t} \tag{2.92}$$

$\underline{X}=Xe^{-i\phi}$为包含振幅及相位差的复振幅。

将式(2.92)代入式(2.90)得$-m\omega^2\underline{X}e^{i\omega t}+ic\omega\underline{X}e^{i\omega t}+k\underline{X}e^{i\omega t}=P_0e^{i\omega t}$，因而

$$\underline{X}=P_0/(k-m\omega^2+i\omega) \tag{a}$$

或将分母化为实数，得$\bar{X}=P_0(k-m\omega^2-ic\omega)/[(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2]$，又由式(2.63)及(2.64)得振幅及初相位为

$$\left.\begin{aligned} X &= P_0/\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2} \\ \phi &= \arctan[c\omega/(k-m\omega^2)] \end{aligned}\right\} \qquad (2.93)$$

由上式得$\tan\phi=c\omega/(k-m\omega^2)$，因而有$\sin\phi=\tan\phi/\sqrt{1+\tan^2\phi}=c\omega/\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}$，由式(2.93)第一式得稳态振动的振幅是

$$X=P_0\sin\phi/c\omega \qquad (2.94)$$

由式(2.92)，可以和式(2.28)和(2.29)一样得到速度和加速度的表达式

$$\dot{x}=\omega\bar{X}e^{i(\omega t+\pi/2)}$$

$$\ddot{x}=\omega^2\bar{X}e^{i(\omega t+\pi)}$$

即每对时间微分一次，振幅增大ω倍，相位超前$\pi/2$。

把包括激振力在内的各个量之间的关系用转动矢量绘出，则如图2.27(a)所示。惯性力、阻尼力、恢复力分别与加速度、速度和位移反向作用，这些量的矢量图示于图(b)，力平衡关系如图(c)中的多边形所示。若只考虑图(c)中阴影部分的三角形，由图(d)所示下列几何关系成立

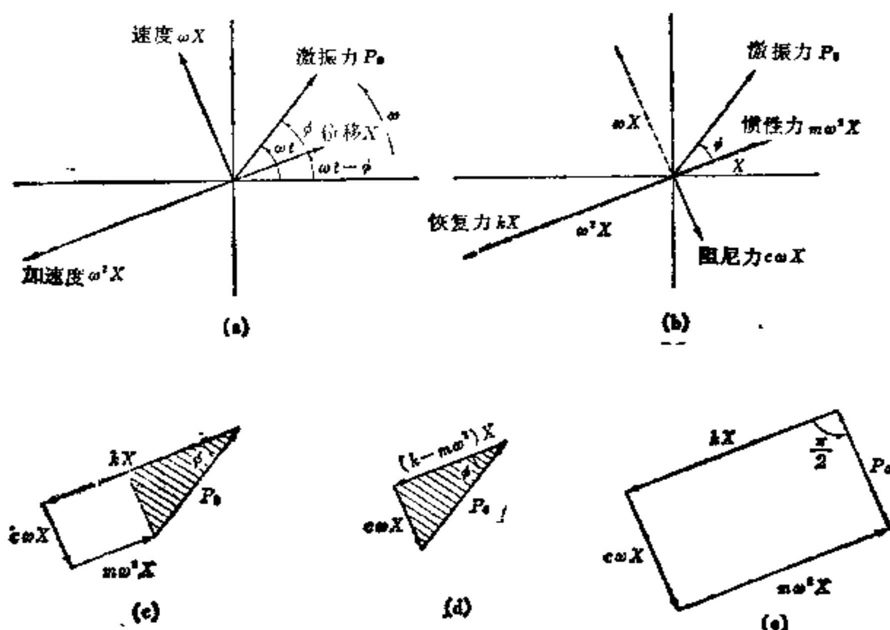


图2.27 强迫振动的矢量表示

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= X\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2} \\ \tan\phi &= c\omega/(k-m\omega^2) \end{aligned}\right\}$$

这与前面的式(2.93)相同。在系统共振时，由式(2.86)知$k=m\omega^2$，力平衡多边形为图2.27(e)所示的长方形，可见有式(2.89)，即$\phi=\pi/2$。

利用式(2.72)可以将前面的式(a)改写成$\bar{X}=(P_0/m)/(\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\omega\bar{\omega})$，因此由式(2.92)可以得到

$$x=(P_0/m)/(\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega)\cdot e^{i\omega t} \qquad (2.95)$$

将此位移与单位质量所受激振力$(P_0/m)e^{i\omega t}$相比可得

$$H(\omega)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega} \tag{2.96}$$

这一形式的复变函数以后经常出现，是所谓频率响应函数的一种。

2.4.4 能量表示

作用在质点上的力P在微小位移dx上作功为Pdx，可改写为$Pdx=P(dx/dt)dt$。设$P=P_0\sin\omega t$，位移$x=X\sin(\omega t-\phi)$，在振动一周内所作的功W_e为

$$W_e=\int_0^{2\pi/\omega} P\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{2\pi/\omega} P_0\sin\omega t\cdot\frac{d}{dt}[X\sin(\omega t-\phi)]dt$$

积分后得

$$\begin{aligned}W_e&=\frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}P_0\sin\omega t\cdot\omega X\cos(\omega t-\phi)d(\omega t)\\&=P_0X\int_0^{2\pi}\sin\omega t(\cos\omega t\cdot\cos\phi+\sin\omega t\cdot\sin\phi)d(\omega t)\\&=P_0X\left[\cos\phi\int_0^{2\pi}\cos\omega t\cdot\sin\omega t d(\omega t)+\sin\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\omega t d(\omega t)\right]\end{aligned}$$

括弧内第一项积分为0，第二项积分为π，故

$$W_e=P_0X\pi\sin\phi \tag{a}$$

另一方面，阻尼器的阻尼力$c\dot{x}$在dx上作功为$c\dot{x}dx$，可改写为$c\dot{x}dx=c\dot{x}(dx/dt)dt=c\dot{x}^2dt$，振动一周内阻尼器消耗能量$W_d$为

$$\begin{aligned}W_d&=\int_0^{2\pi/\omega}c\dot{x}^2dt\\&=\int_0^{2\pi/\omega}c\omega^2X^2\cos^2(\omega t-\phi)dt=c\omega X^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\omega t-\phi)d(\omega t)\end{aligned}$$

即

$$W_d=c\omega X^2\pi \tag{b}$$

由式(a)可见，外力所做功即从外部供给的能量W_e与振幅X成正比。又由式(b)知阻尼引起的能量消耗与振幅X的平方成正比。因此用图表示能量与振幅的关系就像图2.28那样，分别是直线及二次曲线。若供给能量大于消耗能量，则振幅逐渐增大，反之振幅减少。结果，当供给与消耗的能量平衡时，保持在图中所示的两曲线的交点处，振动维持稳定状态。

因此稳态振动的振幅可从式(a)的供给能量与式(b)的消耗能量相等求出，由$P_0X\pi\sin\phi=c\omega X^2\pi$得

$$X=P_0\sin\phi/(c\omega) \tag{c}$$

这个式子和前面的式(2.94)相同。

由式(c)可见，当$\sin\phi=1$即$\phi=\pi/2$时振幅最大。这时振幅为$X_{max}=P_0/(c\omega)$，与式(2.87)相同。

即使不用上一节所介绍的求解微分方程式解的方法，强迫振动时稳态振动的振幅或共振振幅也可以用振动系统的能量平衡求得。在这里能量法并不一定特别有利，但对有些问题，至少对求近似解来说有时极为有效。

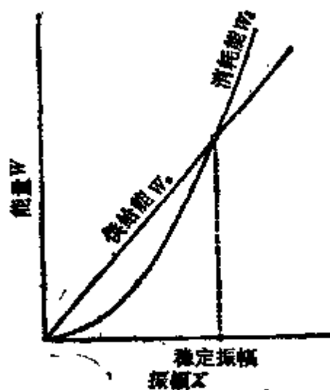


图2.28 供给能与消耗能

设系统的动能为T，势能为V，阻尼能为R，激振力为Q，则只需简单地在有阻尼自由振动时的式(2.69)右边添上激振力Q，便可得到有阻尼系统强迫振动方程的能量表达式为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right)+\frac{dR}{d\dot{x}}+\frac{dV}{dx}=Q \tag{2.97}$$

令$Q=P_0e^{i\omega t}$，则式(2.97)与式(2.90)一致。

2.5　地面运动产生的强迫振动

到现在为止，所有振动系统的基础都处理成固定在刚性地表上。本节考察地表本身运动牵动基础运动造成基底激振时的单质点阻尼系统的振动。

这个问题与地震动引起的结构物振动有密切关系，而且对它的讨论可以给出分析复杂质点系统地震动反应的基础概念。

这里设系统固定于地表，地表引起的基础运动称为地面运动。当考虑某振动系统固定在别的作独立振动的结构物一部分上时，这个固定点的运动也可以认为是这种地面运动。

2.5.1　运动方程式与等效激振力

受地面运动激振的单质点阻尼系统模型通常以图2.29(a)或(b)表示。图(b)中系统置于一无质量平台上，平台再放在无摩擦的滚柱上，平台的运动代表地面运动。

在每个图中，y表示从空间固定轴为基准测得的地面运动位移，固定轴在图中用点划线表示。x是质点相对于基础的位移，因而质点的绝对位移ξ为

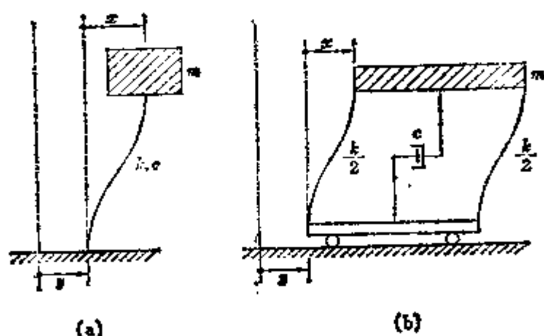


图2.29　地面运动激振下的单质点阻尼系统

$$\xi=x+y \tag{a}$$

质点加速度为$\ddot{\xi}=\ddot{x}+\ddot{y}$，惯性力为$-m(\ddot{x}+\ddot{y})$，运动方程式为

$$m(\ddot{x}+\ddot{y})+c\dot{x}+kx=0 \tag{b}$$

可改写成

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{y} \tag{2.98}$$

或两边除以m，并令

$$\left.\begin{aligned}\bar{\omega}&=\sqrt{k/m}\\ h&=c/(2\sqrt{mk})\end{aligned}\right\} \tag{2.99}$$

则成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=-\ddot{y} \tag{2.100}$$

式中$\bar{\omega}$及h分别为前面讲过的无阻尼固有圆频率及阻尼比。由式(a)有$x=\xi-y$，代入到式(2.98)或(2.100)，以绝对位移表示运动方程，有$m\ddot{\xi}+c\dot{\xi}+k\xi=c\dot{y}+ky$，或者写成

$$\ddot{\xi}+2h\bar{\omega}\dot{\xi}+\bar{\omega}^2\xi=2h\bar{\omega}\dot{y}+\bar{\omega}^2y \tag{2.101}$$

给定地面运动时，由于式(2.98)右边成为已知的时间函数，式(2.98)变成式(2.70)的形式。因此地面运动激振时质点的相对位移相当于假设基础不动，而将地面运动引起的惯性

力$-m\ddot{y}$作为激振力作用时的位移。换句话说，图2.30(a)即图2.29(b)中的系统与图2.30(b)绘出的系统是等价的。从这个意义上说，式(2.98)右边$P(t)=-m\ddot{y}$称为对于地面运动的等效激振力。

由式(b)改写为式(2.98)，在数学上不过是简单的移项，但是地面运动的激振问题却还原成将系统基础看作固定而对质点直接激振的强迫振动问题，具有重要的物理意义。

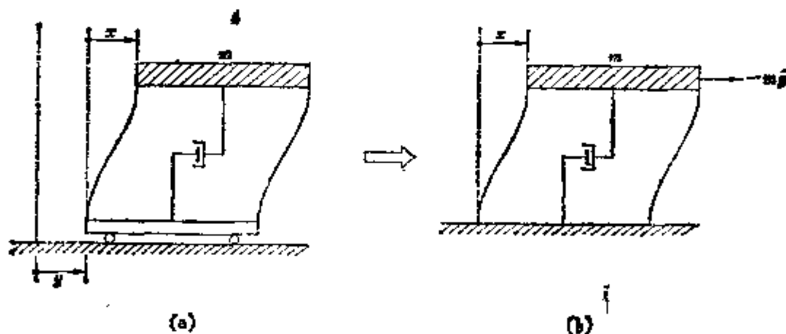


图2.30　地面运动激振时的等效激振力

2.5.2　谐和地面运动激振

设地面运动为谐和振动，其位移、速度、加速度为

$$\left.\begin{aligned} y &= ae^{i\omega t} \\ \dot{y} &= i\omega ae^{i\omega t} \\ \ddot{y} &= -\omega^2 ae^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{2.102}$$

这里a：地面运动位移振幅（单位：cm）

　　ω：地面运动圆频率　（单位：rad/s）

由式(2.100)，运动方程式为

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\omega^2ae^{i\omega t} \tag{2.103}$$

与式(2.73)一样，微分方程(2.103)的通解由相当于自由振动解的余函数及表示稳态振动的特解组合而成。与图2.24表示的情况一样，受到规则的谐和地面运动激振时，由于阻尼作用自由振动也很快消失。因而这里只讨论表示稳态振动的特解。

为求特解，与式(2.92)一样设复振幅为X，有

$$x=Xe^{i\omega t} \tag{a}$$

代入式(2.103)得

$$X=\frac{\omega^2a}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega} \tag{b}$$

由式(2.63)及(2.64)有$\alpha+i\beta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{i\theta}$，$\theta=\arctan(\beta/\alpha)$，所以有

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+i\beta} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{-i\theta} \\ \theta &= \arctan(\beta/\alpha) \end{aligned}\right\}$$

因此式(b)可写成

$$X=\frac{\omega^2a}{\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}}e^{-i\phi}$$

$$\phi=\arctan[2h\bar{\omega}\omega/(\bar{\omega}^2-\omega^2)]$$

由式(a)得位移

$$x=\frac{\omega^2 a}{\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}}e^{i(\omega t-\phi)} \tag{c}$$

式(c)表示的位移振幅还可以写成

$$X=\frac{\omega^2 a}{\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}}=\frac{\omega^2 a/\bar{\omega}^2}{\sqrt{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+[2h(\omega/\bar{\omega})]^2}}$$

式中的分子$\omega^2 a/\bar{\omega}^2=m(\omega^2 a)/k$，它等于激振力振幅$P_0=m(\omega^2 a)$引起的质点静位移$X_s$，因而这时动态放大倍数$\mu=X/X_s$为

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+[2h(\omega/\bar{\omega})]^2}} \tag{2.104}$$

与式(2.82)比较可知，谐和地面运动激振的动态放大倍数与直接对质点加谐和激振力引起的强迫振动相同，所以式(2.104)的图形与图2.25相同。

由式(a)及式(b)得

$$x=Xe^{i\omega t}=\frac{\omega^2 a}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t} \tag{2.105}$$

此式与式(2.102)第一式相加得质点绝对位移为

$$\xi=x+y=\frac{a(\bar{\omega}^2+2ih\bar{\omega}\omega)}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t} \tag{2.106}$$

将它对时间 t 微分两次，得质点绝对加速度为

$$\ddot{x}+\ddot{y}=-\frac{\omega^2 a(\bar{\omega}^2+2ih\bar{\omega}\omega)}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t}$$

因而质点绝对加速度与地面运动加速度之比为

$$\frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{\ddot{y}}=\frac{\bar{\omega}^2+2ih\bar{\omega}\omega}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}=\sqrt{\frac{\bar{\omega}^4+(2h\bar{\omega}\omega)^2}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}}\cdot e^{-i\phi} \tag{d}$$

$$\phi=\arctan\left[\frac{2h(\omega/\bar{\omega})^3}{1-(\omega/\bar{\omega})^2+4h^2(\omega/\bar{\omega})^2}\right] \tag{e}$$

即

$$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{\ddot{y}}\right|=\sqrt{\frac{1+4h^2(\omega/\bar{\omega})^2}{[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2+4h^2(\omega/\bar{\omega})^2}} \tag{2.107}$$

受谐和地面运动激振时质点绝对加速度与地面运动加速度的振幅比称为加速度反应放大倍数。类似地，质点位移与地面运动位移以及质点速度与地面运动速度之比分别为位移反应放大倍数及速度反应放大倍数。但是多数场合不是用质点绝对位移、绝对速度，而是用相对位移、相对速度，即用$|x/y|$或$|\dot{x}/\dot{y}|$来表示。此外加速度、速度及位移反应放大倍数总称为反应放大倍数或传递倍率。

式(2.107)给出的加速度反应放大倍数作为频率比$\omega/\bar{\omega}$的函数用图形表示如图2.31。在$\omega/\bar{\omega}=1$的共振点附近各曲线出现峰值，这个图也是一种共振曲线。加速度反应放大倍数峰值对应的频率比$\omega/\bar{\omega}$也可以像式(2.84)一样，由式(2.107)对$\omega/\bar{\omega}$的微分为0求得为

$$\omega/\bar{\omega}=\sqrt{2/(1+\sqrt{1+8h^2})}\doteq 1 \tag{f}$$

各曲线的峰值，即各阻尼比对应的加速度反应放大倍数最大值可将式(f)代入式(2.107)而得到

$$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{\ddot{y}}\right|_{\max}=\sqrt{(\sqrt{1+8h^2}+4h^2+1)/(\sqrt{1+8h^2}+4h^2-1)}\doteq\frac{1}{2h}$$

近似等于式(2.85)的动态放大倍数。

在式(2.107)中，令$|(\ddot{x}+\ddot{y})/\ddot{y}|=1$，得$[1-(\omega/\bar{\omega})^2]^2=1$，可推得$1-(\omega/\bar{\omega})^2=\pm1$，即$\omega/\bar{\omega}=0$或$\omega/\bar{\omega}=\sqrt{2}$。由图2.31可知在点$\omega/\bar{\omega}=\sqrt{2}$处，不论阻尼比$h$取什么值，所有的放大倍数均为1。$\omega/\bar{\omega}>\sqrt{2}$范围内放大倍数总比1小，即反应加速度比地面运动加速度小。另外在这个范围内，阻尼越大反应放大倍数反而越大。

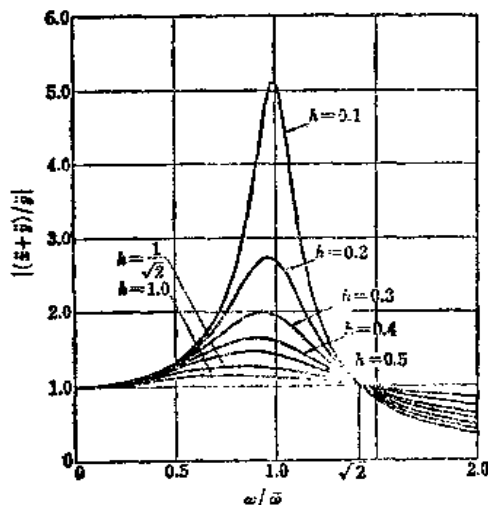


图2.31　加速度反应放大倍数(共振曲线)

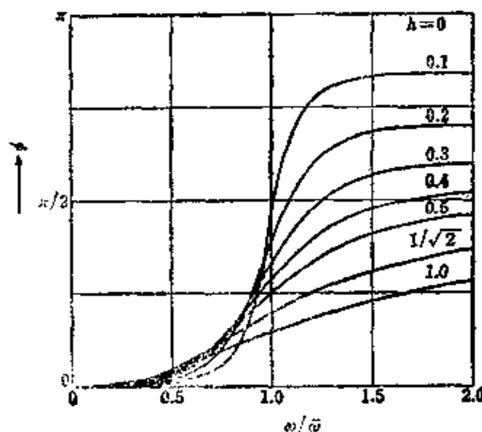


图2.32　地面运动加速度与反应(绝对)加速度间的相位差

由式(e)给出的角度表示谐和地面运动激振时地面运动加速度矢量与质点绝对加速度矢量间的相位差。若将式(e)用图表示便得到图2.32的结果，它与图2.26或式(2.89)所示的质点直接受谐和激振时不同，即使在$\omega/\bar{\omega}=1$共振时，相位差也不等于$\pi/2$。但式(e)在$\omega/\bar{\omega}=1$附近可写成$\phi=\arctan(1/2h)$，因此当$h\ll1$时，可认为$\phi=\pi/2$在共振时近似成立。

【例题2.9】 单质点阻尼系统的有阻尼固有周期为$T_d=0.137$s，阻尼比为$h=20\%$，求受$T=0.25$s的谐和地面运动激振时加速度反应放大倍数及共振时的加速度反应放大倍数。

〔解〕　　$\sqrt{1-h^2}=\sqrt{1-(0.20)^2}=0.9798$

频率比　$\omega/\bar{\omega}=(0.137\times0.9798)/0.25=0.537$

代入式(2.107)得加速度反应放大倍数

$$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{\ddot{y}}\right|=\sqrt{\frac{1+4(0.2)^2(0.537)^2}{[1-(0.537)^2]^2+4(0.20)^2(0.537)^2}}$$

$$=\sqrt{(1+0.0461)/(0.5064+0.0461)}=1.376$$

共振时令式(2.107)中$\omega/\bar{\omega}=1$，则$|\ddot{x}+\ddot{y})/\ddot{y}|_{res}=\sqrt{(1+4h^2)/4h^2}$，于是得

$$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{\ddot{y}}\right|_{res}=\sqrt{\frac{1+4(0.20)^2}{4(0.20)^2}}=2.69$$

这些数值都可以从图2.31上读出。

2.5.3　频率响应函数

如式(2.102)那样，取地面运动的位移、速度和加速度为

$$y = a e^{i\omega t} \tag{a}$$

$$\dot{y} = i\omega a e^{i\omega t} \tag{b}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 a e^{i\omega t} \tag{c}$$

由这个地面运动所产生的相对位移反应，可由式(2.105)得到

$$x = a \cdot \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{d}$$

对时间微分可得相对速度反应及相对加速度反应为

$$\dot{x} = a \cdot \frac{i\omega^3}{\bar{\omega} - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{e}$$

$$\ddot{x} = a \cdot \frac{-\omega^4}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{f}$$

由式(2.106)给出的质点绝对位移反应及其对时间微分后得到的绝对速度反应与绝对加速度反应，分别为

$$\xi = a \cdot \frac{\bar{\omega}^2 + 2ih\bar{\omega}\omega}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{g}$$

$$\dot{\xi} = a \cdot \frac{i\omega(\bar{\omega}^2 + 2ih\bar{\omega}\omega)}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{h}$$

$$\ddot{\xi} = a \cdot \frac{-\omega^2(\bar{\omega}^2 + 2ih\bar{\omega}\omega)}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{i}$$

现将式(i)与式(c)相比，记为$H(\omega)$，则

$$H(\omega) = \frac{\bar{\omega}^2 + 2ih\bar{\omega}\omega}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega} \tag{2.108}$$

圆频率ω或频率$\nu = 2\pi/\omega$统称为频率，因而式(2.108)是频率的函数，这是系统以某个频率作稳态振动时，质点反应相对于激振力的函数，故称为频率响应函数。具体来说式(2.108)是质点绝对加速度相对地面运动加速度的频率响应函数。频率响应函数也称为传递函数。式(d)与式(b)之比为

$$H(\omega) = \frac{-i\omega}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\bar{\omega}\omega}$$

是质点相对位移对地面运动速度的频率响应函数。又式(f)与式(i)之比

$$H(\omega) = \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2 + 2ih\bar{\omega}\omega}$$

为质点相对加速度相对于同一质点绝对加速度的频率响应函数。

由此可见，频率响应函数可定义为式（a）—（i）中任意两个振动量间的关系。此外，2.4.1节所述的对质点直接激振时，如式(2.96)那样，也可以定义激振力与各种反应量间的频率响应函数。

一般说来，频率响应函数是作稳态谐和振动的系统中两个振动量的复振幅之比，它是频率ω及系统固有特性的复变函数，包含了两个振动量间有关振幅比及相位差两方面的信息。频率响应函数的绝对值便是前面讲过的反应放大倍数。比如式(2.108)可写成

$$H(\omega) = \frac{\bar{\omega}^2 + 2h\bar{\omega}(i\omega)}{\bar{\omega}^2 + (i\omega)^2 + 2h\bar{\omega}(i\omega)}$$

可见频率响应函数中频率ω完全可用虚数$i\omega$表示，故$H(\omega)$也可以写成$H(i\omega)$。关于频率响应

函数，还要在3.6节中详细介绍。

【例题2.10】 设系统的无阻尼固有圆频率及阻尼比分别为$\bar{\omega}=46.71\text{rad/s}$及$h=0.20$，地面运动圆频率$\omega=25.13\text{rad/s}$，求质点的绝对加速度相对于地面运动加速度的频率响应函数。

〔解〕将给定的值代入式(2.108)得频率响应函数为

$$H(25.13)=\frac{(46.71)^2+2i(0.20)(46.71)(25.13)}{(46.71)^2-(25.13)^2+2i(0.20)(46.71)(25.13)}$$

$$=\frac{2181.8+469.5i}{1550.3+469.5i}$$

或者将分母有理化且约分后得

$$H(25.13)=1.373-0.113i$$

这个复数的绝对值为

$$|H(25.13)|=\sqrt{(1.373)^2+(0.113)^2}=1.378$$

这里$\omega/\bar{\omega}=25.13/46.71=0.538$，与例题2.9差不多，因此频率响应函数的绝对值与该例题求得的加速度反应放大倍数几乎一致。

第三章　单质点系统的暂态振动

在2.4.1节中已经说过，暂态振动一般是指振动系统从强迫给定的初始位移或初始速度的状态开始到恢复平衡状态为止的瞬态振动。

振动系统有时会连续受到以一定规律随时间变化的非重复力作用。这一类激振问题与地震动问题密切相关，因而特别重要。在这种场合，在某时刻力的作用下所产生的暂态振动尚未结束的下一瞬间，系统又受到下一个不同的力作用，所以系统的总体反应是与暂态振动有关的。

因此，这里的所谓暂态振动的意义与持续时间的长短无关，而应广义地解释为由不规则的激振过程所产生的振动。本章将研究有关单质点阻尼系统的暂态振动的各种问题，引入在地震工程学中极为重要的反应谱概念。

3.1　冲击力产生的振动

设处于静止状态的单质点阻尼系统的质点上在极短时间间隔 Δt 内作用一个力 P。力及其作用时间的乘积叫做冲量。力随时间变化时，其冲量可由如下积分定义：

$$I = \int p(t)\mathrm{d}t$$

作用时间极短的力称为冲击力，如碰撞或打击时的力等就是这种力。现在假设如图3.1所示，作用在极短时间内的冲击力 P 是不变的，则作用的冲量为

$$I = P\Delta t \qquad (3.1)$$

可将冲量作用结束的时刻定为 $t = 0$。

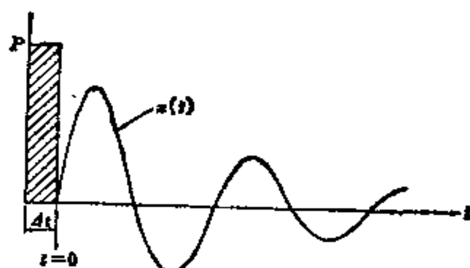


图3.1　对冲击力的位移反应

质量与速度的乘积称为动量，动量的变化与所作用的冲量相等。因此，如果没有冲量的作用，动量就保持不变。这个原理称为动量守衡定律。§1.2中叙述的牛顿第一定律和第二定律即为这一定律的间接表示。

在现在的情况下，设质量为 m 点的质点初始处于静止状态，即速度为零的状态，经过 Δt 时间后速度为 $\dot{x}_0$，则动量的变化为 $m\dot{x}_0$，它与所作用的冲量相等，即

$$m\dot{x}_0 = P\Delta t \qquad (a)$$

因此，质点在 $t = 0$ 时的初速度为

$$\dot{x}_0 = P\Delta t/m \qquad (b)$$

或由式（3.1）得 $\dot{x}_0 = I/m$。

因为 Δt 是个微小量，对式（b）积分来求位移，就得 $x_0 = \frac{1}{2}P\cdot(\Delta t)^2/m$。这个值的量级是微小量的平方，与式（b）的速度 $\dot{x}_0$ 相比可以忽略。因此，图2.15所示的单质点阻尼系统

的质点受到图 3.1 所示的冲量作用时，在 $t=0$ 时刻以后就作初始条件由下式给出的自由振动

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=I/m \tag{c}$$

在这样给定的初始条件下，系统的位移反应可由式（c）和式（2.57）得到

$$x(t)=\frac{I}{m\bar{\omega}_d}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\bar{\omega}_d t \tag{3.2}$$

同时，从式（2.58）和（2.59），可以分别得到速度反应和加速度反应为

$$\dot{x}(t)=\frac{I}{m}e^{-h\bar{\omega}t}\left[\cos\bar{\omega}_d t-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d t\right] \tag{3.3}$$

$$\ddot{x}(t)=-\frac{I\bar{\omega}_d}{m}e^{-h\bar{\omega}t}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d t+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d t\right] \tag{3.4}$$

以 $\zeta(t)$，$\dot{\zeta}(t)$ 和 $\ddot{\zeta}(t)$ 分别表示单位冲量产生的位移反应、速度反应和加速度反应，则在式（3.2）、（3.3）和（3.4）中取 $I=1$，便得

$$\left.\begin{aligned}
\zeta(t)&=\frac{1}{m\bar{\omega}_d}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\bar{\omega}_d t\\
\dot{\zeta}(t)&=\frac{1}{m}e^{-h\bar{\omega}t}\left[\cos\bar{\omega}_d t-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d t\right]\\
\ddot{\zeta}(t)&=-\frac{\bar{\omega}_d}{m}e^{-h\bar{\omega}t}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d t+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d t\right]
\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

表示系统对这种单位冲量的反应的时间函数，一般称为脉冲反应函数。由式（2.50）和式（2.33），有 $\bar{\omega}_d=\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}$，$\bar{\omega}=\sqrt{k/m}$。所以从式（d）可知，如果给定了质点系质量 m，弹簧常数 k 和阻尼比 h，则就确定了脉冲反应函数。也就是说，脉冲反应函数仅与系统的特性有关，是系统的固有函数。

另外，在 $t=0$ 时刻之前，假定了系统处于静止状态。因此如果在时域正确定义了脉冲反应函数，式（d）就应分别写成：

$$\left.\begin{aligned}
\zeta(t)&=\frac{1}{m\bar{\omega}_d}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\bar{\omega}_d t && t\geqslant 0\\
\zeta(t)&=0 && t<0
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\zeta}(t)&=\frac{1}{m}e^{-h\bar{\omega}t}\left[\cos\bar{\omega}_d t-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d t\right] && t\geqslant 0\\
\dot{\zeta}(t)&=0 && t<0
\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\zeta}(t)&=-\frac{\bar{\omega}_d}{m}e^{-h\bar{\omega}t}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d t+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d t\right] && t\geqslant 0\\
\ddot{\zeta}(t)&=0 && t>0
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

式(3.5)至式（3.7）表示在有冲击力作用这一原因之前不会产生反应的结果，这种原因与结果之间存在着一定的关系，即一种因果律关系。一般将 $t<0$ 时为 0 的时间函数称为因果性时间函数。

3.2 叠加积分与褶积

3.2.1 叠加积分

上节中所述的单一冲击力所产生的振动的解析结果，可以用作求解当单质点阻尼系统的质点上作用有随时间变化的任意力$P(t)$时系统的反应，即求解上一章中的运动方程式（2.70）

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P(t) \qquad (3.8)$$

的一种方法。

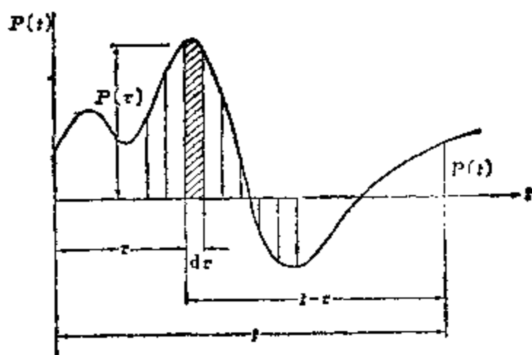


图3.2 冲量的合成

设图 3.2 的曲线表示给定的任意力的时程，将曲线与时间轴之间的部分按图中所示的一个个微小时间间隔$d\tau$进行分割。即把任意力函数$P(t)$看作由一串在无限小时间上作用的冲量合成，每个冲量可以认为如图 3.1 所示从其作用的瞬间开始使系统作自由振动。这种自由振动由式（3.2）表示，系统在任意时刻t时的反应可由这一连串冲量所产生的自由振动的总和来给出。

将$I=P(\tau)d\tau$代入式（3.2），就可得到由图 3.2中的斜线所表示的任意一个冲量所产生的质点位移为

$$dx(t)=\frac{P(\tau)d\tau}{m\bar{\omega}_d}e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)$$

式中t为求反应的时刻，τ为冲量作用的时刻，因此$t-\tau$是从冲量作用开始所经过的时间。

t时刻的实际反应，就是从时刻$\tau=0$到$\tau=t$为止所有冲量产生的反应的总和。因此，将上式从$\tau=0$到$\tau=t$叠加即积分起来，就得出位移反应为

$$x(t)=\frac{1}{m\bar{\omega}_d}\int_0^t P(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)d\tau \qquad (3.9)$$

这样将系统在任意力作用下的反应看作对冲量的反应的叠加，所得到的式（3.9）那样的积分就称为叠加积分或杜哈曼（Duhamel）积分。这个积分的意思就是用自由振动的叠加来表示由随时间变化的力所产生的现象——即所谓过渡现象。式（3.9）中的τ，在物理上表示冲量的作用时刻，在数学上则表示作积分时的参变量或虚变量。

与式（3.9）的情况一样，根据式（3.3）速度反应可由下式表示

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{m}\int_0^t P(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau \qquad (3.10)$$

3.2.2 褶积

给定两个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$时，两个函数的积为

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x) \qquad (a)$$

而由下式定义的函数$f(x)$，则称为函数$f_1(x)$和$f_2(x)$的褶积或卷积

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(y)f_2(x-y)dy \qquad (b)$$

同时将式（b）的演算称为褶积积分或简称为褶积，也可称为卷积积分。以时间 t 作为变量时，时间的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的褶积就是

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.11}$$

设 $f_1(t)$ 是在区间 $0\leqslant t<\infty$ 上定义的函数，$f_2(t)$ 为因果性时间函数，则

$$f_1(\tau)=0 \qquad \tau<0$$
$$f_2(t-\tau)=0 \qquad t<\tau$$

所以式（3.11）的积分范围限定在区间 $0\leqslant\tau\leqslant t$ 内，可以写成

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

这个褶积的值与式（3.11）等值。式（3.12）的定义也可写成

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t) \tag{3.13}$$

如在式（3.11）中作变量变换 $t-\tau\equiv\tau'$，则 $\tau=t-\tau'$，$d\tau=-d\tau'$，所以有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{\infty}^{-\infty}f_1(t-\tau')f_2(\tau')(-\mathrm{d}\tau')$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau')f_1(t-\tau')\mathrm{d}\tau'$$

即

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t) \tag{3.14}$$

由此可知褶积的运算具有交换律。

当三个函数 $f(t)$、$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 之间存在式（3.11）或式（3.12）所表示的褶积关系时，$f_1(t)$ 或 $f_2(t)$ 中的任意一个称为另两个函数的反褶积。式（a）所示的积的逆运算是商，例如

$$f_2(t)=f(t)/f_1(t)$$

与此相对应，本书中将作为式（3.13）的逆运算的反褶积表示成

$$f_2(t)=f(t)\,/\!\!/\,f_1(t) \tag{3.15}$$

如将式（3.15）中的 $f(t)$ 和 $f_1(t)$ 看作已知函数，反褶积 $f_2(t)$ 看作未知函数，则式（3.15）就是关于未知函数 $f_2(t)$ 的积分方程式，属于伏尔泰拉（Volterra）第一类积分方程。

将受任意力 $P(t)$ 作用的单质点阻尼系统的运动方程式（3.8）的解，即表示系统的位移反应的式（3.9），用式（3.5）的脉冲反应函数来表示，则有

$$x(t)=\int_0^t P(\tau)\zeta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.16}$$

或

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\tau)\zeta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.17}$$

也即成为函数 $P(t)$ 和 $\zeta(t)$ 的褶积。同时，由式（3.10）和式（3.6），可将速度反应也以褶积来表示

$$\dot{x}(t)=\int_0^t P(\tau)\dot{\zeta}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

3.3 对地面运动的反应

受到地震动那样的地面运动作用的单质点阻尼系统的模型如上一章的图2.29所示。设地面运动的位移为y，质点相对于基础的位移为x，则系统运动方程式为式(2.98)或(2.100)，即

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{y} \tag{a}$$

或

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=-\ddot{y} \tag{3.18}$$

上式也可写成

$$\ddot{x}+\ddot{y}=-2h\bar{\omega}\dot{x}-\bar{\omega}^2x \tag{b}$$

将式（a）与式（3.8）相比较，可知当下式成立时两式相等

$$P(t)=-m\ddot{y} \tag{c}$$

即$-m\ddot{y}$为等效激振力。因此，将式（c）代入作为式（3.8）的解的式（3.9）和（3.10），就可求出给定任意地面运动加速度时间历程$\ddot{y}(t)$时的相对位移反应和相对速度反应分别为

$$x(t)=-\frac{1}{\bar{\omega}_d}\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)d\tau \tag{3.19}$$

和

$$\dot{x}(t)=-\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau \tag{3.20}$$

将式（3.20）对时间微分，就可求得相对加速度反应。利用含参变量的不定积分的微分公式：

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau,\ t)d\tau=\int_0^t\frac{\partial f(\tau,\ t)}{\partial t}d\tau+f(\tau,\ t)_{\tau=t}$$

相对加速度反应可以写成

$$\ddot{x}(t)=\bar{\omega}_d\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau-\ddot{y}(t)$$

因此，绝对加速度反应可以表示为

$$\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)=\bar{\omega}_d\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau \tag{3.21}$$

注意到式（2.50）的关系，即$\bar{\omega}_d=\bar{\omega}\sqrt{1-h^2}$，将式（3.19）和式（3.20）代入式（b）的右边，就得到与式（3.21）相同的结果。当然这肯定了式（3.19）是运动方程式(3.18)或式（a）的解。

将表示对地面运动加速度反应的式（3.19）、（3.20）和（3.21）写在一起，就有

$$\left.\begin{aligned}
x(t)&=-\frac{1}{\bar{\omega}_d}\int_0^t y(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)dt\\
\dot{x}(t)&=-\int_0^t y(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau\\
\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)&=\bar{\omega}_d\int_0^t y(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\right.\\
&\quad\left.+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau
\end{aligned}\right\}\quad(3.22)$$

式（3.22）所表示的位移、速度和加速度反应可以分别用以下的褶积形式来表示

$$\left.\begin{aligned}
x(t)&=\int_0^t y(\tau)\zeta(t-\tau)d\tau\\
\dot{x}(t)&=\int_0^t y(\tau)\dot{\zeta}(t-\tau)d\tau\\
\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)&=\int_0^t y(\tau)\ddot{\zeta}(t-\tau)d\tau
\end{aligned}\right\}\quad(3.23)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\zeta(t)&=-\frac{1}{\bar{\omega}_d}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\bar{\omega}_d t\\
\dot{\zeta}(t)&=-e^{-h\bar{\omega}t}\left[\cos\bar{\omega}_d t-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d t\right]\\
\ddot{\zeta}(t)&=\bar{\omega}_d e^{-h\bar{\omega}t}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d t+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d t\right]
\end{aligned}\right\}\quad(3.24)$$

它们分别为单质点阻尼系统对给定地面运动加速度的位移、速度和绝对加速度脉冲反应函数。当然它们都是因果性时间函数，所以必定有

$$\zeta(t)=0,\quad \dot{\zeta}(t)=0,\quad \ddot{\zeta}(t)=0\qquad t<0$$

图3.3是在无量纲时间轴坐标$\bar{\omega}_d t$上画出的式（3.24）所示脉冲反应函数的形状。阻尼比为$h=0.05$。当h小于0.05时，波形的持续时间将更长。当h比较大时，波形衰减得就快，这与图2.19所示有阻尼的自由振动情形相同。式（3.24）所表示的关于位移、速度和加速度的脉冲反应函数，实际上是满足下式所示的有阻尼自由振动的运动方程式

$$\ddot{\zeta}(t)+2h\bar{\omega}\dot{\zeta}(t)+\bar{\omega}^2\zeta(t)=0\quad(d)$$

只要将式（3.24）中各式代入上式的左边，就很容易证明这一点。另外，在式（3.24）中取$t=0$，就可得脉冲反应函数的初始值为

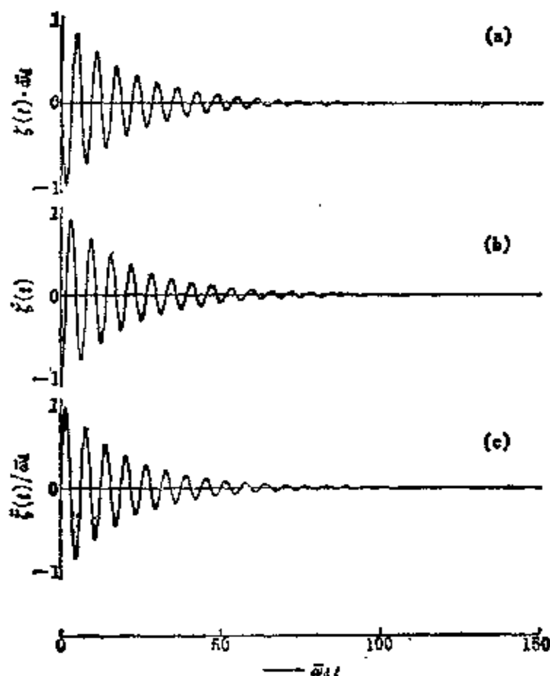


图3.3　脉冲反应函数($h=0.05$)

$$\left.\begin{array}{l}\zeta(0)=0\\ \dot{\zeta}(0)=-1\\ \ddot{\zeta}(0)=2h\bar{\omega}\end{array}\right\}$$

当然，即使在 $t=0$ 的瞬间，也满足式（d）。

将式（3.24）所示的对于地面振动的脉冲反应函数与式（3.5）至式（3.7）所示冲击力作用于质点时的脉冲反应函数相比较，除了负号和系数 $1/m$ 以外，两者是相同的。由于首先从受冲击力作用的质点的反应出发，将其迭加积分得出受任意力 $P(t)$ 作用时的反应，再考虑等效激振力，以地面加速度产生的惯性力 $-m\ddot{y}(t)$ 来代替 $P(t)$，从而得出式(3.24)所示的脉冲反应函数，所以得到上述结果是很自然的。

但在式（3.24）中，表面上已经不包括冲击力或冲量的概念。因此在研究对地面运动的反应问题时，着眼于式（3.23）的关系，将脉冲反应函数定义为地面加速度与反应的反褶积是合适的。即如用式（3.15）的符号来表示，就是

$$\left.\begin{array}{l}\zeta(t)=x(t)/\!/\ddot{y}(t)\\ \dot{\zeta}(t)=\dot{x}(t)/\!/\ddot{y}(t)\\ \ddot{\zeta}(t)=[\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)]/\!/\ddot{y}(t)\end{array}\right\}\quad(3.25)$$

进一步将式（3.25）右边的两个函数不限定为地面加速度和质点的反应，而是作为与系统有关的任意两个振动量，并将脉冲反应函数看作这两个时间函数的反褶积，则就成为广义的脉冲反应函数定义了。无论是哪种情况，脉冲反应函数都是只由 $\bar{\omega}$（或 $\bar{\omega}_d$）和 h，或 m，c，k 等系统的特征值来决定的，是系统固有的因果性时间函数。

当地面加速度的时间过程 $\ddot{y}(t)$ 给定时，对式（3.22）逐步积分，或计算式（3.23）的褶积，或对式（3.18）的微分方程式进行直接积分，就可以求出单质点阻尼系统的反应时间过程 $x(t)$，$\dot{x}(t)$ 或 $\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)$。且不说理论上的意义，在实用上几乎都采用8.3.2节

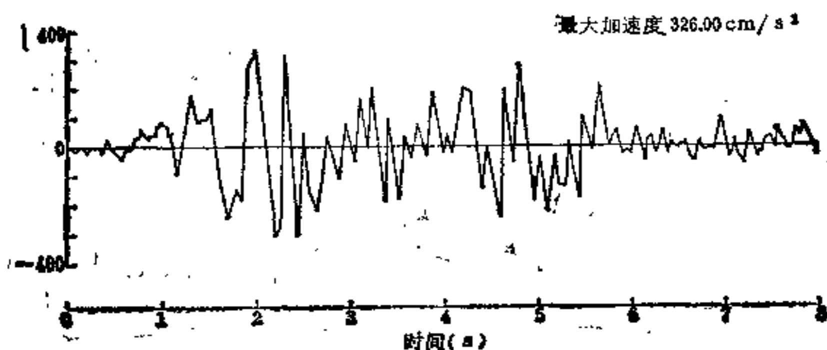


图3.4 埃尔森特罗1940南北分量加速度记录

1）本书中所使用的埃尔森特罗1940南北分量地震加速度时程曲线，是按作者的方法[2]对由强震反应分析委员会报告[3]中发表的数值作了零线校正后的曲线。

2）Ohsaki, Y., Correction of Earthquake Accelerogram, Research Report 72-01. Department of Architecture, Faculty of Engineering, University of Tokyo, April 1972.

3）武藤清：SERACに使用した地震記録のデジタル量，強震応答解析委員会報告，6巻，1964年10月。

中所述算法对式（3.18）进行直接积分的方法。

现以图3.4所示埃尔森特罗1940南北分量的地震加速度记录[1]作为输入地面运动，系统的阻尼比取为 $h=0.05$，则可求得系统无阻尼固有周期为$T=0.3$ s 时的绝对加速度反应、相对速度反应和相对位移反应的时程曲线，如图3.5所示。另外，当系统阻尼比同样为 $h=0.05$，无阻尼固有周期为$T=0.3$ s，0.6 s 和1.2 s 时的绝对加速度反应时程曲线分别如图3.6（a）、（b）、（c）所示。可以看出，虽然输入地震动是一样的，但系统的振动反应明显具有其各自本身的固有周期特性。

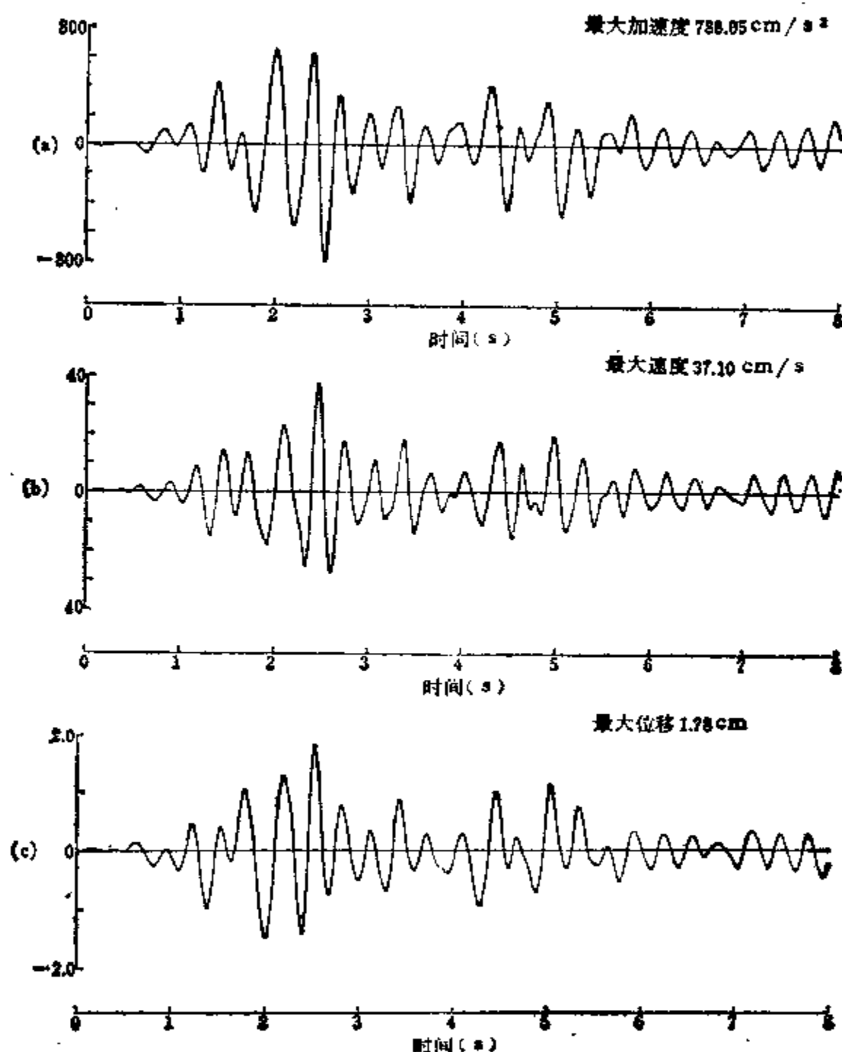


图3.5　埃尔森特罗1940南北分量地震动输入下单质点系统($\overline{T}=0.3$s, $h=0.05$)的（a）绝对加速度反应曲线，（b）相对速度反应曲线，（c）相对位移反应曲线

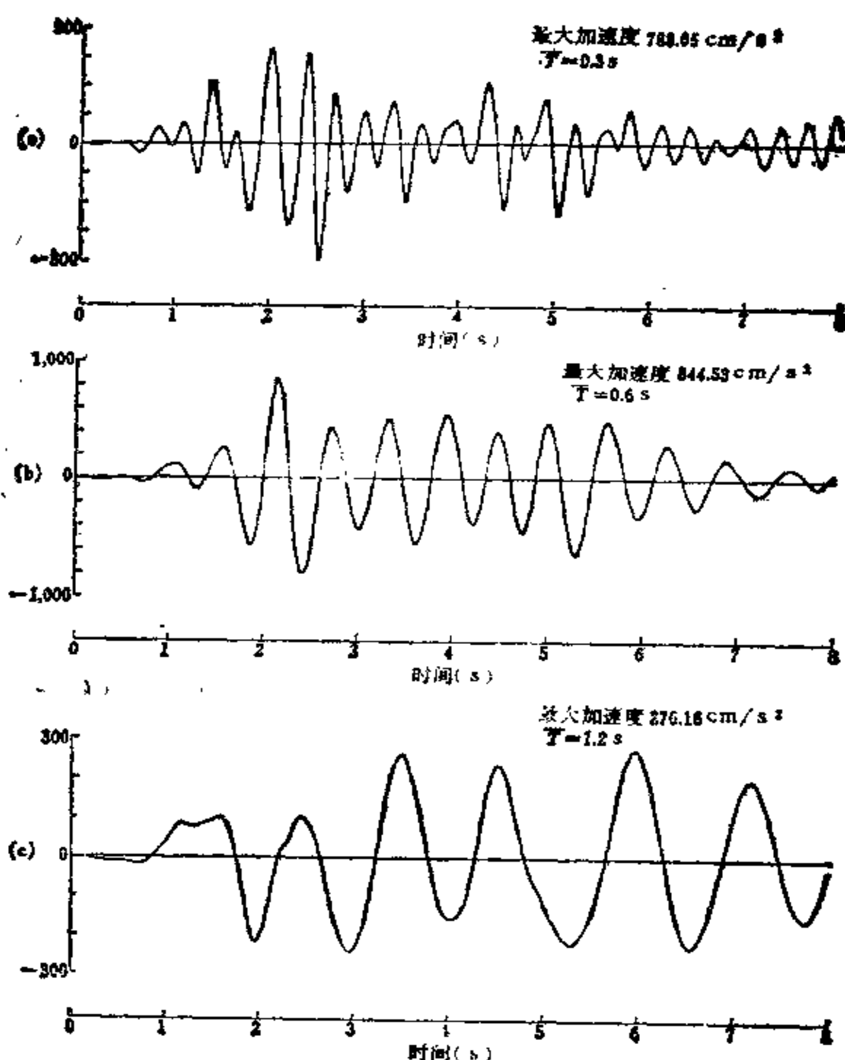


图3.6 在埃尔森特罗1940南北分量地震动输入下单质点系统($h=0.05$)的绝对加速度反应

3.4 地震反应谱

3.4.1 反应谱

上一节中已经说过，单质点系统在地面运动加速度作用下的反应是系统的阻尼比 h 和无阻尼固有周期 T 的函数，随时间 t 而变化。但是，从考虑地震时的地面运动来进行建筑物抗震设计的角度看，反应的最大值往往要比反应随时间的变化更重要。在给定的地面运动加速度作用下，反应的最大值当然也是 h 和 T 的函数。设单质点阻尼系统的最大相对位移反应、最大相对速度反应和最大绝对加速度反应分别为 $S_d(h, T)$，$S_v(h, T)$ 和 $S_a(h, T)$，则由式（3.22）可表示成

$$
\left.\begin{aligned}
S_d(h, T) &= \frac{1}{\bar{\omega}_d}\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\,d\tau\right|_{max}\\
S_v(h, T) &= \left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau\right|_{max}\\
S_a(h, T) &= \bar{\omega}_d\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\left[\left(1-\frac{h^2}{1-h^2}\right)\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos\bar{\omega}_d(t-\tau)\right]d\tau\right|_{max}
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}
$$

以图3.6的例子来说，反应的最大值如图中所标出的，分别为

$$
\left.\begin{aligned}
S_a(0.05,\ 0.3) &= 788\ \mathrm{cm/s^2}\\
S_a(0.05,\ 0.6) &= 844\ \mathrm{cm/s^2}\\
S_a(0.05,\ 1.2) &= 276\ \mathrm{cm/s^2}
\end{aligned}\right\}
$$

另外，在同样情况下，当系统的阻尼比为 $h=0.10$时，反应的最大值分别为

$$
\left.\begin{aligned}
S_a(0.10,\ 0.3) &= 652\ \mathrm{cm/s^2}\\
S_a(0.10,\ 0.6) &= 705\ \mathrm{cm/s^2}\\
S_a(0.10,\ 1.2) &= 213\ \mathrm{cm/s^2}
\end{aligned}\right\}
$$

图3.7—3.12 画出了以阻尼比 h 为参数，对应不同的无阻尼固有周期值的函数 $S_d(h, T)$，$S_v(h, T)$ 和$S_a(h, T)$，分别称为给定地震动的相对位移反应谱、相对速度反应谱和绝对加速度反应谱，统称为地震反应谱。或者也可以分别简称为位移反应谱、速度反应谱和加速度反应谱，统称为反应谱。同时，不仅是这些图上所表示的图形，就是式（3.26）所表示的$S_d(h, T)$，$S_v(h, T)$ 和$S_a(h, T)$ 等函数本身也可以称为反应谱。图3.7、图3.8和图3.9分别表示埃尔森特罗1940南北分量地震动的加速度反应谱、速度反应谱和位移反应谱。阻尼比如图上所示采用 $h=0$，0.05，0.10。当然，阻尼比越小，反应谱值越大。另外，在这些图上还分别标出了埃尔森特罗1940南北分量地震动的最大加速度、最大速度和最大位移。

常常如图3.10、图3.11和图3.12那样，将反应谱曲线的周期坐标用对数刻度画出。为了将短周期范围内的反应谱表示得更清楚些，采用这种表示方法比较好。

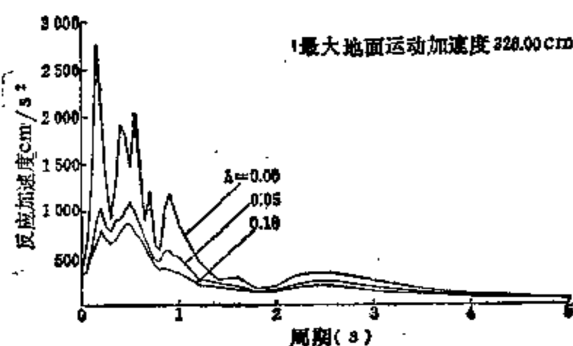


图3.7 加速度反应谱

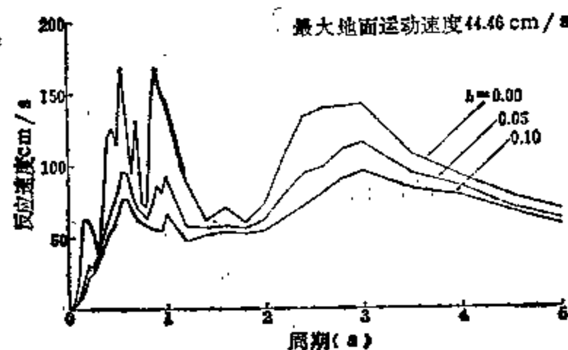


图3.8 速度反应谱

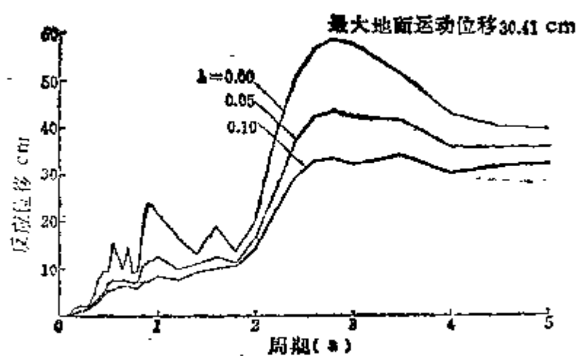


图3.9 位移反应谱

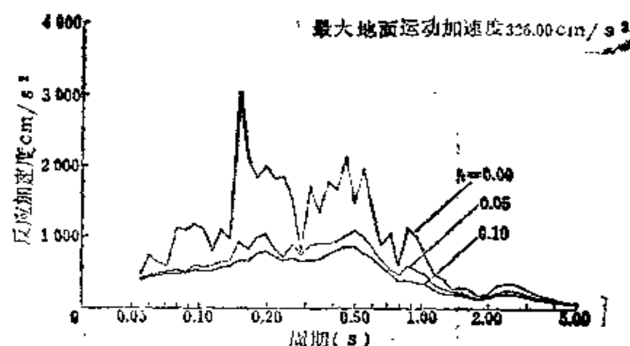


图3.10 加速度反应谱

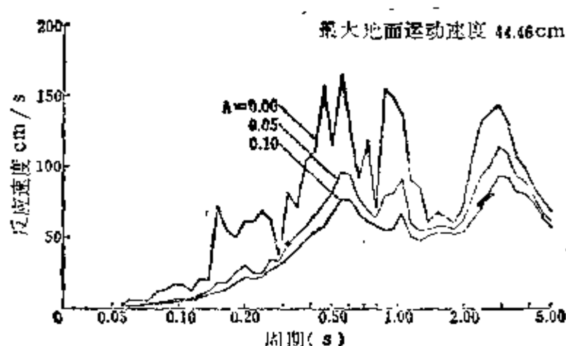


图3.11 速度反应谱

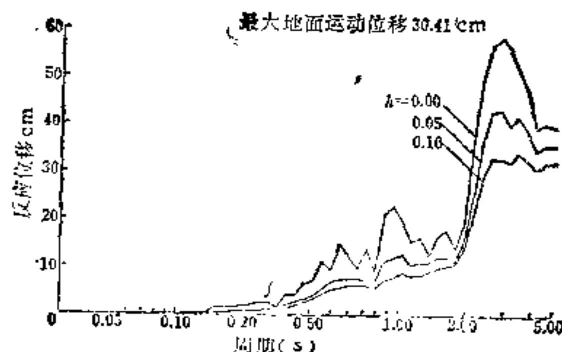


图3.12 位移反应谱

地震反应谱的概念可以用图3.13中的简图来说明。首先，如图中（b）所示，将阻尼常数全部为一给定值h_1的、无阻尼固有周期T各不相同的振子（即单质点系统）并列在一个台上（图上只分别画出了具有较短固有周期T_1、中长固有周期T_2和较长固有周期T_3的三个系统）。其次，用图（a）所示地震动加速度对这个台激振。各质点将对这种输入加速度产生反应，现假设测出了各质点的加速度，即记录到图（c）那样的反应加速度波形（前面的图3.6就是反应加速度时间过程的一例）。再其次，从这些反应波形求出最大振幅，设这些最大值如图（c）所示分别为$(S_a)_1$，$(S_a)_2$和$(S_a)_3$。于是，如图（d）所示，在周期轴上的三个周期T_1，T_2和T_3处，分别画出对应的$(S_a)_1$，$(S_a)_2$和$(S_a)_3$值，就得出图上所示的三个点。上面只是说明了三个周期不同的质点系的情况，如果在图（b）的台上放上一大群周期相差很小的质点系就可得到如图（d）中实线所示的、由连接最大反应加速度点得到的曲线。另外，上面都假定质点系的阻尼比全为h_1。如果改变阻尼比值重复进行同样的实验，则对应不同的阻尼比值，可以画出图（d）上用虚线表示的那些曲线。

图（d）中所示的曲线或曲线组，是最初把给出的图（a）所示地震动加速度作为输入时得到的反应谱。这里如图（c）所示，测定了作用于质点系群的各质点上的加速度，所以图（d）上求得的是加速度反应谱。很明显，如果测定的是质点的相对速度或相对位移，则用同样的方法可以分别画出速度反应谱或位移反应谱。

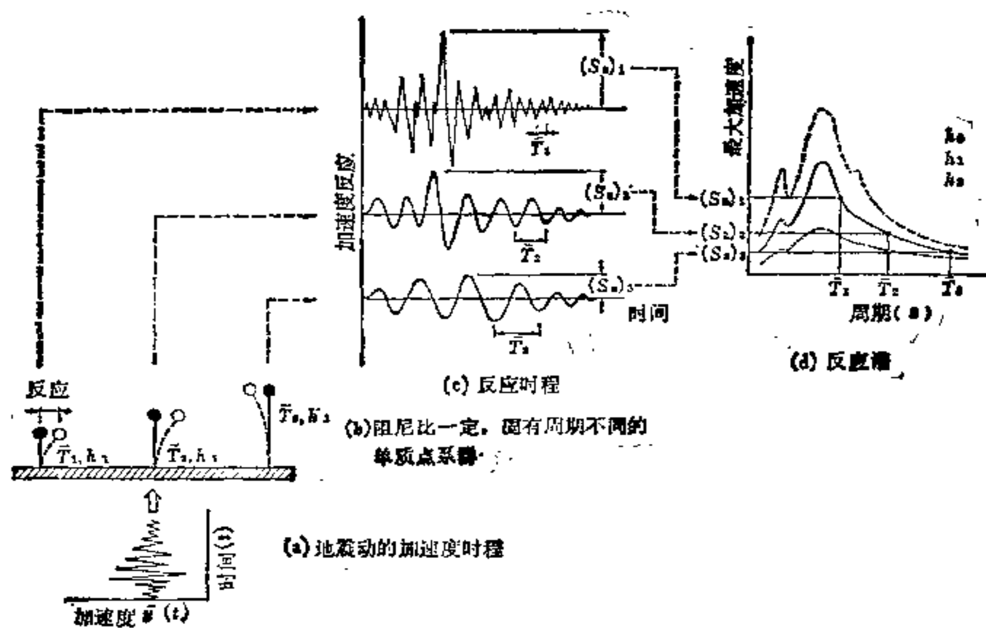


图3.13 地震反应谱说明简图

3.4.2 拟反应谱

前面已说过多次，一般的结构物，其阻尼比 h 远小于 1 。因此，近似有$h^2 \doteq 0$ ，$\sqrt{1-h} \doteq 1$ 。这样，从式（2.50）可得 $\bar{\omega}_d \doteq \bar{\omega} = 2\pi/T$。利用这些关系，并假设 h 的量级很小，与 1 相比可以忽略不计，则式（3.26）可以写成

$$
\left.\begin{aligned}
S_{pd}(h, T) &= \frac{1}{\bar{\omega}}\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}(t-\tau)d\tau\right|_{max} \\
S_{pv}(h, T) &= \left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\cos\bar{\omega}(t-\tau)d\tau\right|_{max} \\
S_{pa}(h, T) &= \bar{\omega}\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}(t-\tau)d\tau\right|_{max}
\end{aligned}\right\} \tag{3.27}
$$

式（3.27）中的第一个式子和第三个式子之间有如下关系：

$$S_{pa}/S_{pd} = \bar{\omega}^2 = (2\pi/T)^2$$

另外，当输入加速度中高频成分不太多，$\ddot{y}(t)$随时间的变化比较缓慢时，第二式中的余弦函数可以用正弦函数来代替，这样式（3.27）可写成

$$
\left.\begin{aligned}
S_{pd}(h, T) &= \frac{1}{\bar{\omega}}\left|\int_0^t \ddot{y}(t)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}(t-\tau)d\tau\right|_{max} \\
S_{pv}(h, T) &= \left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}(t-\tau)d\tau\right|_{max} \\
S_{pa}(h, T) &= \omega\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}(t-\tau)d\tau\right|_{max}
\end{aligned}\right\} \tag{3.28}
$$

式（3.28）那样近似表示的反应谱$S_{pd}(h, T)$，$S_{pv}(h, T)$ 和 $S_{pa}(h, T)$，分别称为拟位移反应谱、拟速度反应谱和拟加速度反应谱，统称为拟反应谱。

由式（3.28），有如下关系：$\bar{\omega}S_{pd} = S_{pv} = (1/\bar{\omega})S_{pa}$，或 $(2\pi/T)S_{pd} = S_{pv} = (T/2\pi)S_{pa}$。因此，可以认为，以式（3.26）定义的原来的反应谱之间近似有如下关系成立

$$\bar{\omega}S_d \doteq S_v \doteq (1/\bar{\omega})S_a \tag{3.29}$$

或

$$(2\pi/T)S_d \doteq S_v \doteq (T/2\pi)S_a \tag{a}$$

这些关系式中加速度反应谱和位移反应谱之间的关系式是个精度较高的近似式

$$S_a/S_d \doteq (2\pi/T)^2 \tag{b}$$

从式（3.26）的第一个式子和第三个式子可以看出，当阻尼比为 $h=0$ 时，这个关系式是严格成立的。

与此相对照，式（a）中的近似关系式 $S_a=(2\pi/T)S_v$ 和 $S_v=(2\pi/T)S_d$ 的精度一般不太高，特别在长周期范围内精度很差。在极端情况 $T\to\infty$（$\bar{\omega}\to 0$）时，由式（3.28）的第二式有 $S_{pv}(h,\infty)=0$，而根据式（3.26）的第二式，则有

$$S_v(h,\infty)=\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{max}=|\dot{y}(t)|_{max}$$

就具有某个给定的固有周期和阻尼比的系统来说，S_a 和 S_d 分别为反应中的绝对加速度最大值和相对位移最大值，即 $S_a=(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}$，$S_d=x_{max}$。将其代入式（b），就得

$$(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}/x_{max}=(2\pi/T)^2=\bar{\omega}^2 \tag{3.30}$$

这个关系式有较高的精度。

上述拟反应谱包含着相当粗糙的假定，一般说来是精度不太高的近似值。因此，在计算地震动的反应谱时，没有特别积极的理由采用按式（3.28）计算的拟反应谱而不去计算精确的反应谱。拟反应谱概念的主要意义在于表示对同一地震动的加速度、速度和位移反应谱之间有式（3.29）所示的简单近似关系。利用式（3.29）的关系，可以用图示法同时读出速度反应谱 S_v，加速度反应谱 S_a 和位移反应谱 S_d*。这种图称为三联反应谱或三坐标反应谱。作为例子，图3.14给出了埃尔森特罗1940南北分量地震动的三联反应谱。图中曲线对应的阻尼比为 $h=0$，0.05，0.10，横轴为系统的无阻尼固有周期，向左方下倾斜的直线、水平直线和向下右方倾斜的直线分别为读

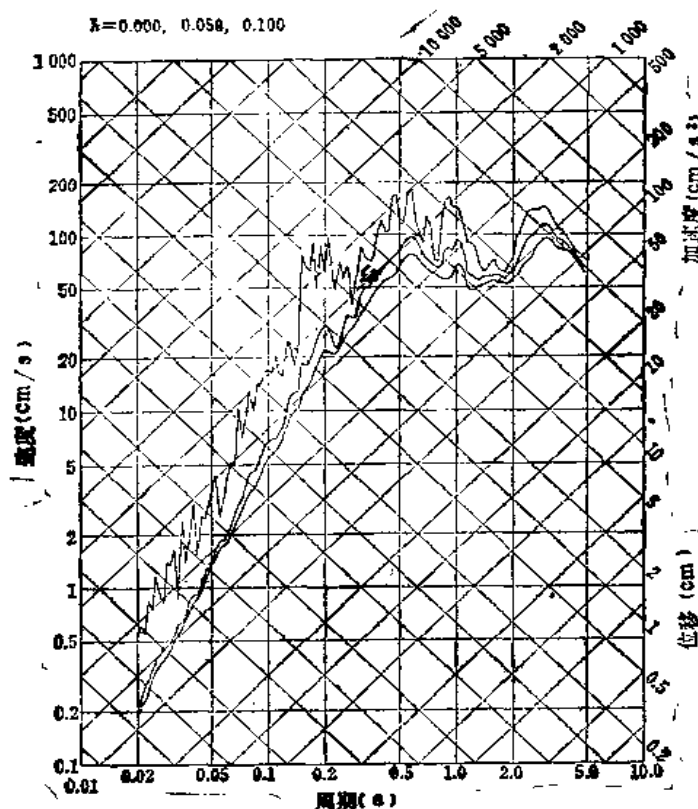


图3.14 三联反应谱

* Blume, J.A., Newmark, N.M. & Corning, L.H.: Design of Multi-Story Reinforced Concrete Buildings for Earthguake Motions, Portland Cement Association, Chicago, Illinois, 1961.

取加速度、速度和位移反应谱的坐标，所有坐标都是对数坐标。

【例题3.1】 计算在冲击地震动作用下的反应谱（$h=0$）。

〔解〕地动加速度$\ddot{y}_0$只是在极短时间间隔Δt内产生。由此，作用于质点上的等效激振力为$P=-m\ddot{y}_0$，冲量为$-m\ddot{y}_0\Delta t$。因此质点的初速度为$\dot{x}_0=-\ddot{y}_0\Delta t$。于是在式（2.57）至式（2.59）中取$h=0$，$\bar{\omega}_d=\bar{\omega}$，就得系统的反应为

$$x/\dot{x}_0=(1/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}t$$

$$\dot{x}/\dot{x}_0=\cos\bar{\omega}t$$

$$(\ddot{x}+\ddot{y})/\dot{x}_0=-\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t \qquad \ddot{y}=0 \quad (t>0)$$

x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$的最大值就是反应谱，而$\sin\bar{\omega}t$和$\cos\bar{\omega}t$的最大值都是1。因为$\bar{\omega}=2\pi/T$，所以反应谱为

$$S_d/\dot{x}_0=T/2\pi$$

$$S_v/\dot{x}_0=1$$

$$S_a/\dot{x}_0=2\pi/T$$

用图画出来就如图3.15所示，加速度反应谱为双曲线，速度反应谱为水平直线，而位移反应谱为通过原点的斜直线。

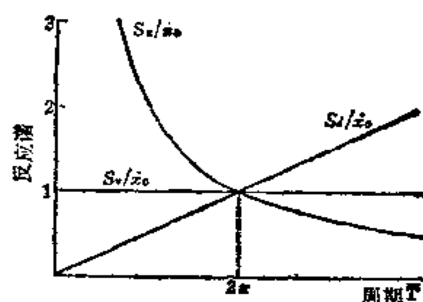


图3.15 反应谱的大致形状

地震时的地面运动不是单一的冲击。另外$h\neq0$时的反应谱形状与图上所表示的曲线不太一样。因此图3.15给出的只是地震反应谱的一般的大致形状。

3.4.3 标准化反应谱

阻尼比为h，无阻尼固有周期为T的单质点系统上作用有地面运动加速度$\ddot{y}(t)$时，绝对加速度反应的最大值，即前面所说的加速度反应谱为$S_a(h, T)=(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}$。现取这种绝对加速度反应的最大值与地面运动加速度的最大值之比，即定义下式所示的无量纲函数：

$$\bar{q}_a(h, T)=S_a(h, T)/\ddot{y}_{max} \tag{3.31}$$

或

$$\bar{q}_a(h, T)=(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}/\ddot{y}_{max} \tag{3.32}$$

上一章中式（2.107）是在谐和地面运动作用下的加速度反应放大倍数，这里的$\bar{q}_a(h, T)$则为在地震动这种不规则地面运动作用下的一种加速度反应放大倍数。

函数$\bar{q}_a(h, T)$，或者与图3.7或图3.10所示加速度反应谱的情形一样，以阻尼比h为参数，画出对应不同无阻尼固有周期T时的值，就称为标准化加速度反应谱。一般所谓标准化，是指将某个变量除以同样性质的一个给定值，而将其表示成一个无量纲的量。图3.16为埃尔森特罗1940南北分量地震动的标准化加速度反应谱。

与式（3.31）或式（3.32）相同，下列无量纲函数分别称为标准化速度反应谱和标准化位移反应谱：

$$\left.\begin{aligned}\bar{q}_v(h, T)=S_v(h, T)/\dot{y}_{max}=\dot{x}_{max}/\dot{y}_{max}\\ \bar{q}_d(h, T)=S_d(h, T)/y_{max}=x_{max}/y_{max}\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

它们与前面的标准化加速度反应谱一起，统称为标准化反应谱。图3.17和图3.18分别表示埃尔森特罗1940南北分量地震动的标准化速度反应谱和标准化位移反应谱。如式（3.31）至式（3.33）所示，所有标准化反应谱都是分别由对应的地面运动最大值来标准化的。因此，将

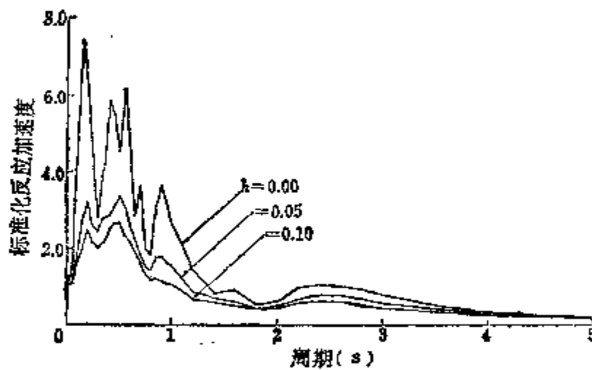


图3.16　标准化加速度反应谱

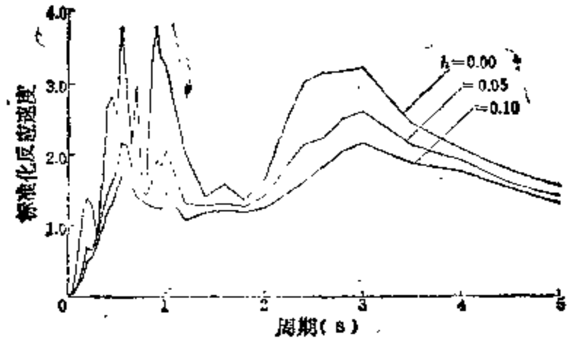


图3.17　标准化速度反应谱

图3.7至图3.9分别与图3.16至图3.18相比较就可知道，反应谱和标准化反应谱的曲线形状是相同的，只是纵坐标值不同。在只比较加速度值不同的两个以上地震动的反应特性时，采用标准化反应谱是很方便的。

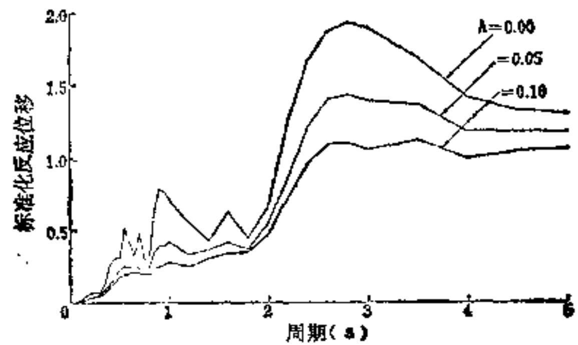


图3.18　标准化位移反应谱

3.4.4　反应谱的意义

a．对结构物的影响

从地震动记录上可以直接读出地震动的最大振幅、持续时间和主要的频率等。但对地震动所具有的频率特性和能量等，并不一定能判明。如果求出了富里哀谱、功率谱等，则就可得到有关地震动的频率特性和能量的精确信息。但这些都是地震动本身具有的特性，与结构物没有任何关系。与此相反，反应谱则表示地震动对以单质点阻尼系统所代表的结构物的最大影响。因此，根据反应谱可以特别从对结构物的影响这个角度出发搞清地震动所具有的特性。从这个意义讲，反应谱与结构物的设计有密切的关系。

b．地震输入

加速度反应谱给出了作用于系统上的力，即地基对系统的地震输入。从加速度反应谱上读出对应于系统的固有周期和阻尼比的谱值 $S_a=(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}$，就是作用于系统的最大绝对加速度。这个最大绝对加速度乘以系统的质量 m，就是地震时作用于质点的最大惯性力。如果不考虑阻尼力的影响，这个最大惯性力就是系统基底上产生的最大剪切力。

$$Q_{max}=m(\ddot{x}+\ddot{y})_{max} \tag{3.34}$$

这个最大剪力与系统的重量 $W=mg$ 之比叫做基底剪力系数

$$C=Q_{max}/W=(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}/g=S_a(h, T)/g \tag{3.35}$$

式中 g 为重力加速度，即 $g=980\text{cm/s}^2$。基底剪力系数是作用于系统上的地震力与重量之比。与通常静力抗震设计上的静力地震系数相对应，基底剪力系数也常称为动力地震系数。

现将埃尔森特罗1940南北分量（最大加速度为326cm/s²）和塔夫特1952东西分量（最大加速度为147cm/s²）的地震动都按比例换算成最大加速度为0.2g的时程曲线，并以它们作为地面运动加速度，求出对固有周期和阻尼比的几种不同组合情况下的基底剪力，结果列于表3.1中。从这个例子可以看出，即使地震动相同，输入力的大小也随系统的固有周期和阻尼

比即系统本身特性的不同而显著不同。同时，当地震动不同时，即使最大加速度值相等，输入力也会有很大差别。这个结果清楚表明：以往采用的静力抗震设计法，不管结构物的特性如何一律假定为静力地震系数是不合理的。

表3.1　　　　基底剪力系数的例子

地震动	埃尔森特罗1940南北分量（换算成最大加速度为0.2g）		塔夫脱1952东西分量（换算成最大加速度为0.2g）	
固有周期＼阻尼比	$h=0.02$	$h=0.05$	$h=0.02$	$h=0.05$
0.5	0.788	0.672	0.408	0.377
1.0	0.421	0.311	0.201	0.170
2.0	0.111	0.101	0.140	0.116
4.0	0.060	0.065	0.043	0.035

c. 与刚体输入的关系

标准加速度反应谱是由式（3.31）或式（3.32）定义的，即

$$\bar{q}_s(h,T)=S_a(h,T)/\ddot{y}_{max}=(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}/\ddot{y}_{max} \quad (a)$$

上式可以写成

$$\bar{q}_s(h,T)=m(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}/(m\ddot{y}_{max}) \quad (b)$$

分子是作用于质点上的最大惯性力。或者根据式（3.30），有

$$(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}=\bar{\omega}^2x_{max}=(k/m)x_{max} \quad (c)$$

代入式（b），就有

$$\bar{q}_s(h,T)=kx_{max}/(m\ddot{y}_{max}) \quad (d)$$

式中分子为作用于图3.19所示系统的最大剪力。另一方面，式（b）和式（d）中的分母$m\ddot{y}_{max}$〔图3.19(b)〕是作用在固定于地面的刚体上的最大惯性力。因此，标准化加速度反应谱$\bar{q}_s(h,T)$表示作用于单质点系上的最大惯性力或系统上产生的最大剪力与同一质量的刚体紧贴在地上时所受的最大作用力之比。另外，将单质点系的弹簧无限变硬，其极限状况就是刚体。所以，如图3.19(b)上已写明的那样，刚体的固有周期为$T=0$。

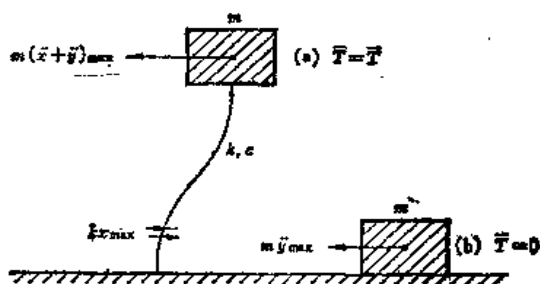


图3.19　单质点系和地上的刚体

d. 谱烈度

速度反应谱本来是表示反应速度的最大值的，它与地震动给予系统的最大能量密切相关。即，设系统的弹簧常数为k，最大相对位移为x_{max}，则最大势能为

$$\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

考虑到$x_{max}=S_d$，以及由式（3.29）有$\bar{\omega}S_d\doteq S_v$，所以每单位质量的最大能量为

$$\frac{1}{2}(k/m)x_{max}^2=\frac{1}{2}(\bar{\omega}x_{max})^2=\frac{1}{2}S_v^2$$

从上述关系来看，速度反应谱可以看作是地震动作用于结构上并与结构固有周期相对应的一

种能量谱，因此可以认为它是与地震动所具有的破坏力密切相关的。

但是，即使是限定在某一地区，受地震动作用的结构物的固有周期也不一样。同时，即使是同一个结构物，受到局部损伤后其固有周期也会改变。所以，豪斯纳[1]考虑到一般结构物的主要固有周期大体上在0.1—2.5 s 之间，提出以与这个周期区间内的总能量相当的积分值来作为表示地震动强度的一个指标

$$I_h = \int_{0.1}^{2.5} S_v(h, T)dT \tag{3.36}$$

上式中的I_h称为地震动的谱烈度。对同一地震动，谱烈度的大小自然随阻尼常数h的大小而异。图3.20表示埃尔森特罗1940南北分量地震动当$h=0.02$时的速度反应谱。图中斜线部分的面积表示谱烈度

$$I_{0.02} = \int_{0.1}^{2.5} S_v(0.02, T)dT$$

其值为$I_{0.02}=185.2$cm。

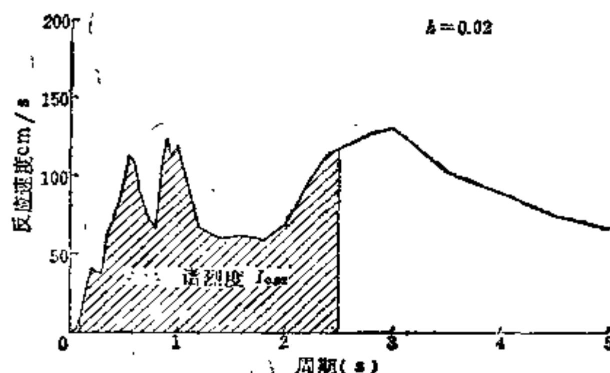


图3.20 谱烈度

图3.21为1966年松代地震时得到的加速度记录之一[2]，这是迄今为止日本记录到的最大的加速度604cm/s²。但从图上可以看出，加速度值很大的波只有很少几个，地震动的持续时间也不过4 s左右。因此，如图3.22所示，谱烈度只有$I_{0.02}=90.4$cm，与埃尔森特罗1940南北分量地震动相比，尽管最大加速度约为其2倍，谱烈度值则只有其1/2左右。松代地震时的地震动几乎都具有这种特征，这与尽管加速度很大但并未产生显著的震害这一实际情况是符合的。

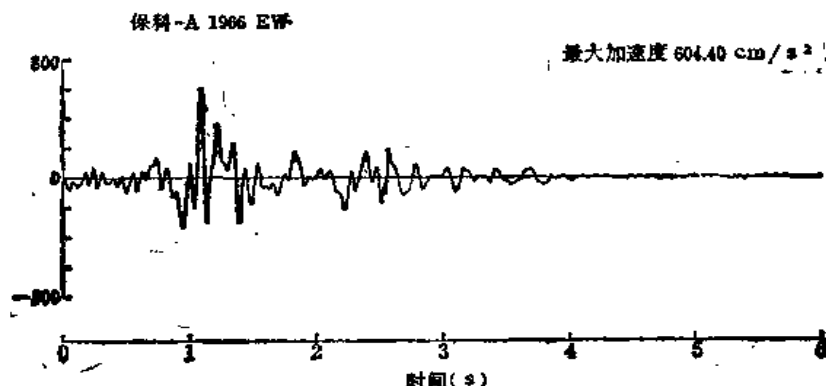


图3.21 保科-A1966EW分量加速度记录

c. 剪力谱

位移反应谱为$S_d(h, T)=x_{max}$，乘以弹簧系数k后，就得到作用于系统上的最大剪力

$$Q_{max} = kx_{max} = kS_d(h, T) \tag{c}$$

1) Housner, G. W., Spectrum Intensities of Strong Motion Earthquakes, Proc. 1952 Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, Earthquake Engineering Research Institute, 1952.

2) 松代群発地震地域における強震記録のデジタル・データ，强震观测资料第1号，东京大学地震研究所强震计観测センター。

当然，利用式（c）的关系，上式与前面的式（3.34）即下式，是一致的，

$$Q_{max}=m(\ddot{x}+\ddot{y})_{max}=mS_a(h,T) \tag{f}$$

比较式（e）和式（f），加速度反应谱可以看作系统质量全部相同时的最大剪力谱，而位移反应谱则可看作系统弹簧系数完全相同时的最大剪力谱。

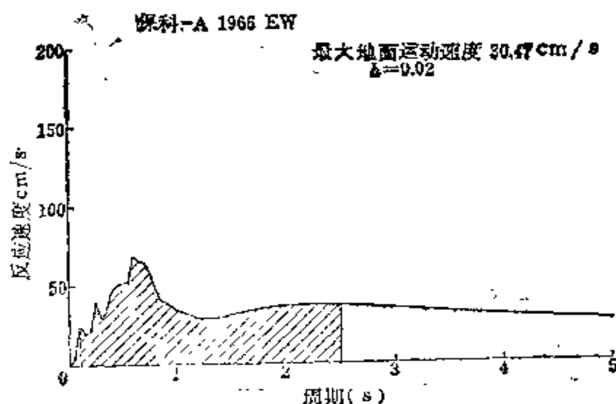


图3.22 保科-A1966EW分量地震动的谱烈度

f. 对多质点系统的应用

反应谱只是关于最简单的单质点系统的概念。但对于复杂的多质点系统的结构振动，也可以将其分解成具有不同固有周期的简单的单质点系的振动分量，即所谓按振型分解，再按反应谱求出各个分量的反应，最后重新将它们合成，从而得出复杂模型的反应。方法的细节将在6.5.2节中说明，这种分析方法称为反应谱振型迭加法，是结构物动力分析中经常采用的方法。

g. 最大反应的发生时间

从图3.6所示单质点系统对埃尔森特罗1940南北分量地震动的加速度反应时程曲线可以看出，系统固有周期为$T=0.6$ s时，最大反应加速度发生于$t=2.14$ s，而固有周期为$T=1.2$ s时则发生于$t=5.95$ s。在相同的地震动作用下，最大反应的发生时刻一般因系统固有周期而异。因为反应谱只表示各个不同固有周期而异。反应谱只表示不同固有周期时的最大反应值，所以应该注意到这些最大值并不是同时发生的。另外，即使系统的固有周期相同，最大反应加速度、最大反应速度和最大反应位移的发生时刻也不是相同的。

3.5 拉普拉斯变换解法

单质点粘滞阻尼系统的暂态振动或强迫振动可以用下面的线性非齐次微分方程式的通解来表示

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=P(t) \tag{3.37}$$

等号右边的$P(t)$是作为时间t的函数给出的、作用于单位质量上的激振力。2.4.1节中所述的由谐和激振产生的强迫振动情况中，如式（2.73）所示，有$P(t)=(P_0/m)\sin\omega t$，或用式（2.90）中所示的复数表达式$P(t)=(P_0/m)e^{i\omega t}$。

在2.5.1节中所述的地震动激振情况下，如式（2.100）所示，$P(t)=-\ddot{y}$。特别是在谐和地震动激振的情况下，如式（2.103）所示，取为$P(t)=\omega^2 ae^{i\omega t}$的形式。

如2.4.1节中所述，式（3.37）的解法如下：首先求出等号右边为零的齐次微分方程的解，即余函数。其次，假设如式（2.75）、式（2.91）或式（2.92）那样的特定形式的函数，以求出方程式的特解，将如式（2.79）所示的余函数与特解相加，即为通解。这里余函数表示在反应初期产生的暂态振动，特解表示稳态振动。如前面已说过的那样，余函数中所包含的积分常数必须由初始条件来决定。

根据本节所述的采用拉普拉斯变换的解法，没有必要假设这种特定形式的特解和另外考

虑初始条件，而可以直接求出要求的通解。拉普拉斯变换是在数学上确定的一个理论体系，而且不仅限于振动问题，在静力学、电气工程、控制工程等等所有工程学中应用范围都很广。但在这里仅限于对本书其它部分直接有关的内容作一简单介绍。

3.5.1 拉普拉斯变换

一般设 $f(x)$为变量x的函数，$K(x, y)$为包含参变量y的x的函数，则由积分

$$F(y)=\int_{0}^{\infty} K(x, y) f(x) \mathrm{d} x \tag{3.38}$$

或

$$F(y)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) \mathrm{d} x \tag{3.39}$$

给定的函数$F(y)$称为函数$f(x)$的积分变换，同时函数$K(x, y)$称为积分变换的核。$F(y)$是$f(x)$关于核$K(x, y)$的积分变换。在式（3.38）或式（3.39）的变换关系中，常常称$f(x)$为原函数或表函数，相应的$F(y)$称为象函数或里函数。

除本节中所述的拉普拉斯变换外，还有卡尔森（Carsen）变换、梅林（Mellin）变换、司梯尔捷斯（Stieltjes）变换、亨格尔（Hankel）变换、希尔伯特（Hilbert）变换等多种积分变换，都有其对应的核函数形式。3.6.7节中所述的富里哀变换也是一种积分变换。希尔伯特变换是以$K(x, y)=1/[\pi(x-y)]$为核的变换，表示成

$$F(y)=\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-y} \mathrm{d} x \tag{3.40}$$

作为积分变换的共同性质，当c为任意常数时，下式成立：

$$\int_{\infty}^{0} K(x, y)[c f(x)] \mathrm{d} x=c F(y) \tag{3.41}$$

即积分变换具有线性性质。另外，设a、b为任意常数，且

$$F_1(y)=\int_{0}^{\infty} K(x, y) f_1(x) \mathrm{d} x$$

$$F_2(y)=\int_{0}^{\infty} K(x, y) f_2(x) \mathrm{d} x$$

时，加法法则成立，即有

$$\int_{0}^{\infty} K(x, y)[a f_1(x)+b f_2(x)] d x=a F_1(y)+b F_2(y) \tag{3.42}$$

现设式（3.38）中的核为一指数函数$K(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$，变量x看作为时间，写成t，参数y用惯用的符号写成p，则式（3.38）成为

$$F(p)=\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-p t} f(t) d t \tag{3.43}$$

这个积分变换$F(p)$称为时间函数$f(t)$的拉普拉斯变换。同时，反过来将$f(t)$称为$F(p)$的拉普拉斯逆变换。

有时将$F(p)$为$f(t)$的拉普拉斯变换，以及相反$f(t)$为$F(p)$的拉普拉斯逆变换，记成$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$和$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$。在本书中将这种拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换的相互关系，即所谓构成拉普拉斯变换对的两个函数$F(p)$和$f(t)$的关系，用如下记号表示

$$f(t) \sqsupset F(p) \tag{3.44}$$

并且通常将原函数放在等号左边，象函数写在右边。

参变量 p 通常是复变量，因此拉普拉斯变换$F(p)$是复函数。当然 p 可以是实数，也可以是纯虚数，但一般说来是个实数为正或零的复变量，即

$$\mathscr{R}(p) \geqq 0 \tag{3.45}$$

拉普拉斯变换并非对任何函数都存在，只有在原函数$f(t)$满足以下条件时才有定义。

(i) t 为正值时，$f(t)$连续或至少分段连续。即将$f(t)$分割成有限个区间时，它在各区间内连续，且在区间端点的值有限。

(ii) $f(t)$为具有指数阶的函数。即对任何 t 值，都可以找到正的常数M，δ，使下式成立

$$|f(t)| \leqslant Me^{\delta t} \tag{3.46}$$

尤其当 $\delta = 0$ 时，即可以选定一个正常数M使$|f(t)| \leqq M$时，称函数$f(t)$是有界的。

(iii) 当 $t < 0$ 时，即$f(t) = 0$。即$f(t)$为因果性时间函数。但从式（3.43）可以知道，因为积分下限为 $t = 0$，拉普拉斯变换与 $t < 0$ 范围内的函数值无关。所以条件（iii)只有当 $t < 0$ 的范围有问题时才有限制的必要。

本书中所研究的拉普拉斯变换的原函数，是地震动或有阻尼系统的反应时间过程。因此，如设现象的开始点为 $t = 0$，则 $t < 0$ 范围内全为 0，且物理上总是有界的，不存在不连续性，事实上不存在任何与上述三个条件抵触的情况。

3.5.2 拉普拉斯变换举例

现在举几个例子，当式（3.43）所示拉普拉斯变换式中的原函数$f(t)$ 为简单函数时，求拉普拉斯变换$F(p)$。另外，这一节所述的对原函数作微分、积分等运算的拉普拉斯变换，不仅函数本身，运算以及由变换形成的变换对关系也都很重要。在下面的计算中，a 一般为复数常数。

a.常数

设$f(t) = a$ （常数），因为

$$\int_0^{\infty} a e^{-pt} dt = a\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{p}$$

所以

$$a \sqsupset \frac{a}{p} \tag{3.47}$$

b.指数函数

设$f(t) = e^{at}$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

即

$$e^{at} \sqsupset \frac{1}{p-a} \tag{3.48}$$

另外，设A 为任意常数，则由拉普拉斯变换的线性性质，可得

$$Ae^{at} \sqsupset \frac{A}{p-a} \tag{3.49}$$

根据式（3.42）所表示的积分变换的加法法则，当A_k，a_k($k = 1, 2 \cdots n$)为任意常数时，可将式（3.49）扩展为

$$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{a_k t} \text{与} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-a_k} \tag{3.50}$$

反之，考虑拉普拉斯变换给定为 p 的有理函数$F(p)=P(p)/Q(p)$的情况。设$P(p)/Q(p)$均为 p 的多项式，分子$P(p)$的次数比分母$Q(p)$的次数低，且$P(p)/Q(p)$已化为最简单式。

如$Q(p)$为 p 的 n 次多项式，$Q(p)=0$ 有 n 个异根：$p_1, p_2 \cdots p_n$（复根也可以），则有 理函数$P(p)/Q(p)$可表示成如下式所示的分数和

$$\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{B_1}{p-p_1}+\frac{B_2}{p-p_2}+\cdots+\frac{B_n}{p-p_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{p-p_k} \tag{3.51}$$

上式称为有理函数的部分分数展开。同时，使函数$F(p)=P(p)/Q(p)$趋于无穷大时 的 p 值，即$p_1, p_2 \cdots p_n$称为函数的极，$B_1, B_2 \cdots B_n$则称为相应的极的留数。各个分数的系数，即留 数B_k，可以用以下方法求出。

设多项式$Q(p)$中p^n的系数为Q_0，$Q(p)$可写成

$$Q(p)=Q_0(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n) \tag{a}$$

在式（3.51）的两边乘上$Q(p)$，则

$$\begin{aligned} P(p)=Q_0[&B_1(p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_n)\\ &+B_2(p-p_1)(p-p_3)\cdots(p-p_n)\\ &+\cdots\\ &+B_n(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_{n-1})] \end{aligned} \tag{b}$$

同时，由式（a）可得$Q(p)$对 p 的微分为

$$\begin{aligned} Q'(p)=Q_0[&(p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_n)\\ &+(p-p_1)(p-p_3)\cdots(p-p_n)\\ &+\cdots\\ &+(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_{n-1})] \end{aligned} \tag{c}$$

如把 $p=p_1$代入式（b），则只剩下不包含（$p-p_1$）项的第一行乘积，第二行以下的积均 为0，所以

$$P(p_1)=Q_0B_1(p_1-p_2)(p_1-p_3)\cdots(p_1-p_n) \tag{d}$$

同样，对式（c）很明显有

$$Q'(p_1)=Q_0(p_1-p_2)(p_1-p_3)\cdots(p_1-p_n) \tag{e}$$

于是，用式（e）除式（d），便得$P(p_1)/Q'(p_1)=B_1$。同样，将 $p=p_k$代入式（b）和式（c），就可得到一般式：

$$B_k=P(p_k)/Q'(p_k) \tag{3.52}$$

式（3.51）的系数就全部可以确定。因此，式（3.51）的部分分数展开可以表达成

$$\frac{P(p)}{Q(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k} \tag{3.53}$$

上式称为赫维赛德（*Heaviside*）展开定理。上式等号右边与式（3.50）的等号右边 形 式 相同，所以有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t}\text{与}\frac{P(p)}{Q(p)} \tag{3.54}$$

当拉普拉斯变换以 p 的有理函数形式给定时，这个逆变换式在使用上极为方便。

【例题3.2】 设$Q(p)=(p^2+a^2)(p^2+2bp+c^2)$，试利用赫维赛德展开定理对$p$的有理函数$1/Q(p)$作部分分数展开。设式中$b<c$。

〔解〕$Q(p)=0$的根为$p_1=ia, p_2=-ia, p_3=-b+i\sqrt{c^2-b^2}, p_4=-b-i\sqrt{c^2-b^2}$，同时$Q'(p)=2p(p^2+2bp+c^2)+2(p+b)(p^2+a^2)$。$1/Q(p)$是式（3.51）中$P(p)=1$的情况，所以可展开成

$$\frac{1}{Q(p)}=\frac{B_1}{p-p_1}+\frac{B_2}{p-p_2}+\frac{B_3}{p-p_3}+\frac{B_4}{p-p_4}$$

由式（3.52），可得系数B_1至B_4如下

$$B_1=1/Q'(p_1)=1/[2ia(c^2-a^2+2iab)]$$

$$B_2=1/Q'(p_2)=-1/[2ia(c^2-a^2-2iab)]$$

$$B_3=1/Q'(p_3)=1/[2i\sqrt{c^2-b^2}(a^2-c^2+2b^2-2ib\sqrt{c^2-b^2})]$$

$$B_4=1/Q'(p_4)=-1/[2i\sqrt{c^2-b^2}(a^2-c^2+2b^2+2ib\sqrt{c^2-b^2})]$$

c. 三角函数

将$f(t)=\sin at$或$\cos at$直接代入式（3.43），就很容易求出三角函数的拉普拉斯变换，但这里我们用式（3.54）来求一下变换式。首先设给定$F(p)=a/(p^2+a^2)$，即$P(p)=a$，$Q(p)=p^2+a^2$。

$Q(p)=0$的根为$p_1=ia$，$p_2=-ia$，而$Q'(p)=2p$，所以

$$\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)}=\frac{a}{2ia}=\frac{1}{2i}\qquad \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)}=-\frac{a}{2ia}=-\frac{1}{2i}$$

因此，式（3.54）的左边即原函数为

$$\sum_{k=1,2}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t}=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$$

利用式（2.25）的关系，可得

$$\sin at \sqsupset \frac{a}{p^2+a^2} \tag{3.55}$$

同样，很容易证明$\cos at$的拉普拉斯变换为

$$\cos at \sqsupset \frac{p}{p^2+a^2} \tag{3.56}$$

此外，若设b也为常数，而拉普拉斯变换给定为$F(p)=a/[(p+b)^2+a^2]$。这时，$P(p)=a$，$Q(p)=p^2+2bp+a^2+b^2$，而$Q(p)=0$的根为$p_1=-b+ia$，$p_2=-b-ia$。同时，$Q'(p)=2(p+b)$，所以

$$\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)}=\frac{a}{2ia}=\frac{1}{2i}\qquad \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)}=-\frac{a}{2ia}=-\frac{1}{2i}$$

因此

$$\sum_{k=1,2}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t}=\frac{e^{(-b+ia)t}}{2i}-\frac{e^{(-b-ia)t}}{2i}=e^{-bt}\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}=e^{-bt}\sin at$$

即

$$e^{-bt}\sin at \sqsupset \frac{a}{(p+b)^2+a^2} \tag{3.57}$$

同样可得

$$e^{-bt}\cos at \leftrightharpoons \frac{p+b}{(p+b)^2+a^2} \tag{3.58}$$

将式（3.56）和式（3.56）分别与式(3.57)和式(3.58)相比较，就可知道，当象函数中 p 从 p 变为 $p+b$ 时，原函数就扩大e^{-bt}倍。这个关系是所谓拉普拉斯变换的平移法则之一。

d．δ函数

考虑图3.23所示函数，它在 $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ 范围内取一定值 $1/\varepsilon$，在此范围以外全为0，即

该函数可表示成：

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1/\varepsilon & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0 & \varepsilon<t\end{cases} \tag{f}$$

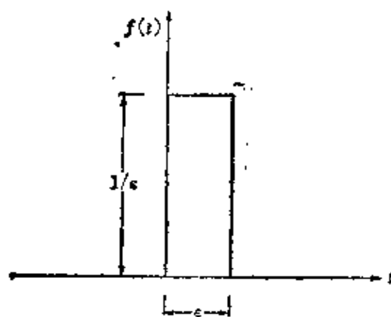


图3.23　矩形脉冲

很明显，这个函数的图形与时间轴之间的面积为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} dt=1$$

即使 ε 改变，面积也不变，这种函数叫做矩形脉冲。当脉冲的宽度无限变小时，其极限就是函数$\delta(t)$，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(t)=\delta(t) \tag{g}$$

函数$\delta(t)$称为狄拉克δ函数，或简称为δ函数。即在函数$\delta(t)$是由下式定义的函数

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t)=0 \qquad t\neq 0\\ &\delta(0)=\infty\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

根据§3.1中的说明，δ函数表示作用时间无限小而又具有单位冲量的冲击力，很明显它是因果性时间函数。$t=a$ 时刻作用的冲击力可表示为$\delta(t-a)$。

将式(f)表示的矩形脉冲$f(t)$代入式（3.43），求得其拉普拉斯变换为

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-pt}}{\varepsilon}dt=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}e^{-pt}\,dt=\frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{\varepsilon}=\frac{1}{p\varepsilon}(1-e^{-p\varepsilon})$$

指数函数$e^{-p\varepsilon}$可展开为

$$e^{-p\varepsilon}=1-p\varepsilon+\frac{(p\varepsilon)^2}{2!}-\frac{(p\varepsilon)^3}{3!}+\cdots$$

所以矩形脉冲的拉普拉斯变换为

$$f(t)\leftrightharpoons 1-\frac{p\varepsilon}{2!}+\frac{(p\varepsilon)^2}{3!}-\cdots$$

取 $\varepsilon\to 0$ 的极限时，由式(g)，上式左边为δ函数，结果得

$$\delta(t)\leftrightharpoons 1 \tag{3.60}$$

e．微分

设函数$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(p)$，试求$f(t)$对时间 t 微分的导函数的拉普拉斯变换。根据分部积分法，有

$$\int_0^\infty e^{-pt}\ \frac{df(t)}{dt}dt=\Big[\ e^{-pt}f(t)\ \Big]_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

右边的第一项和第二项分别为$\Big[e^{-pt}f(t)\Big]_0^\infty=-f(0)$，$p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=pF(p)$，所以有

$$\int_0^\infty e^{-pt}\ \frac{df(t)}{dt}dt=pF(p)-f(0) \tag{h}$$

即

$$\frac{df(t)}{dt}\fallingdotseq pF(p)-f(0) \tag{3.61}$$

这里引入了给定函数在 $t=0$ 时的初始值$f(0)$，这一点具有重要的意义。

同样，对二阶导函数，参照式(h)可得

$$\int_0^\infty e^{-pt}\ \frac{d^2f(t)}{dt^2}dt=\Big[e^{-pt}\ \frac{df(t)}{dt}\Big]_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}\ \frac{df(t)}{dt}dt$$
$$=-f'(0)+p[pF(p)-f(0)]$$

即

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}\fallingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0) \tag{3.62}$$

进而对高阶导函数也可逐阶重复以上的推导，得到如下的拉普拉斯变换的一般式：

$$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\fallingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-p^{n-3}f''(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{3.63}$$

式中$f'(0)$，$f''(0)\cdots f^{(n-1)}(0)$ 分别表示函数$f(t)$在 $t=0$ 时的一阶、二阶…$(n-1)$ 阶导数。如§3.5.3中所要讲到的，式(3.63)是将拉普拉斯变换用于解微分方程式时基本的重要关系式。

f.积分

试求函数$f(t)$的不定积分 $I(t)=\int_0^t f(t)d\tau$的拉普拉斯变换。当然 $dI(t)/dt=f(t)$，为简单起见，考虑积分$I(t)$对所有 t 值都有界且连续的情况。将$I(t)$代替式(3.43)中的原函数$f(t)$，分部积分后得到

$$\int_0^\infty e^{-pt}\Big[\int_0^t f(\tau)d\tau\Big]dt=-\frac{1}{p}\Big[e^{-pt}\int_0^t f(\tau)d\tau\Big]_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

右边第一项因当 $t=\infty$时$e^{-pt}=0$，$t=0$ 时积分项为0，所以总为0。由此可得

$$\int_0^\infty e^{-pt}\Big[\int_0^t f(\tau)d\tau\Big]dt=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

即

$$\int_0^t f(t)dt\fallingdotseq\frac{1}{p}F(p) \tag{3.64}$$

将此过程重复几次，便有

$$\underbrace{\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t}_{n}f(t)(dt)^n\fallingdotseq\frac{1}{p^n}F(p) \tag{3.65}$$

式(3.64)或式(3.65)的关系在本书中并未特别加以利用，这里把它提出来是为了理解积分运算与前面的微分运算一样，也可由拉普拉斯变换法来作变换，而且积分分析的运

算变换成了简单的除以 p 的代数运算。

g.褶积

如式（3.12）所示，当给定两个时间函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，且$f_2(t)$为因果性时间函数时，下式定义的函数$f(t)$是函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的褶积：

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \tag{i}$$

现将式（i）的褶积作为原函数代入式（3.43），则$f(t)$的拉普拉斯变换成为

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}\left[\int_0^t [f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right]dt \tag{3.66}$$

将e^{-pt}分解为两个指数函数的积$e^{-pt}=e^{-p\tau}\cdot e^{-p(t-\tau)}$，并将其移入里面的积分号内，则上式表示成如下二重积分：

$$F(p)=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t e^{-p\tau}f_1(\tau)e^{-p(t-\tau)}f_2(t-\tau)\,d\tau\right]dt \tag{j}$$

如果如图3.24所示，以直角坐标表示变量 t 和 τ，则这个二重积分的积分域就是 $\tau=0$的直线OA和与其成45°并由 $\tau=t$ 表示的直线OB之间所夹的无限大的楔状区域AOB。即如图3.24(a)所示，式（j）的积分首先沿从 $\tau=0$ 至 $\tau=t$ 的纵向带域进行，然后将这些带域内的积分值从 $t=0$到 $t=\infty$加起来，由此覆盖整个AOB区域。但如图3.24(b)所示，如先从 $t=\tau$ 到 $t=\infty$沿水平向带域积分，然后再使 τ 从 $\tau=0$ 变化到 $\tau=\infty$，也可以覆盖AOB区域，求出相同的积分值。因此式（j）也可改写成

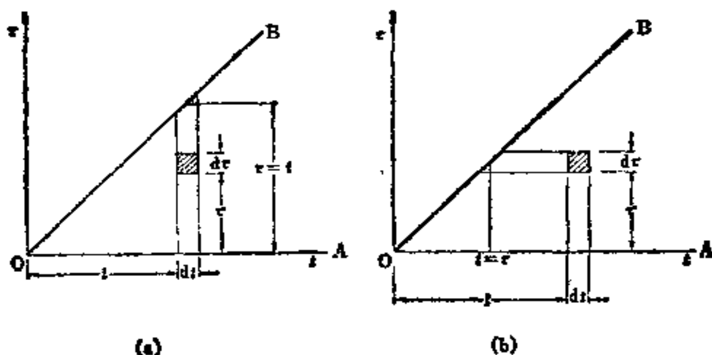


图3.24　二重积分的两种方法

$$F(p)=\int_0^{\infty}\left[\int_{t=\tau}^{t=\infty}e^{-p\tau}f_1(\tau)e^{-p(t-\tau)}f_2(t-\tau)\,dt\right]d\tau \tag{k}$$

在此再引入变量 $\xi=t-\tau$，则$dt=d\xi$，故式（k）可表示成

$$F(p)=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-p\tau}f_1(\tau)e^{-p\xi}f_2(\xi)\,d\xi\right]d\tau \tag{l}$$

将式（l）分成有关变量 τ 和有关变量 ξ 这两个积分的积，则

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-p\tau}f_1(\tau)\,d\tau\cdot\int_0^{\infty}e^{-p\xi}f_2(\xi)\,d\xi \tag{m}$$

由式（3.43）可知，这两个积分分别为函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的拉普拉斯变换。

因此，根据式（3.66）和式（m），可以知道两个函数的褶积的拉普拉斯变换等于这两个函数各自的拉普拉斯变换之积。即如果$f_1(t)\doteq F_1(p)$，$f_2(t)\doteq F_2(p)$，则

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\doteq F_1(p)\cdot F_2(p) \tag{3.67}$$

如果利用式（3.15）的符号，则可表示成

$$f_1(t)*f_2(t) \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p) \tag{3.68}$$

h. 拉普拉斯变换表

表3.2列出了上面求出的拉普拉斯变换的结果。

表3.2　　拉普拉斯变换表

原函数	$f(t)$	象函数 $F(p)$
常数	a	a/p
指数函数	e^{at} $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k e^{a_k t}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}$	$1/(p-a)$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-a_k}$ $P(p)/Q(p)$
三角函数	$\cos at$ $\sin at$ $e^{-bt}\cos at$ $e^{-bt}\sin at$	$p/(p^2+a^2)$ $a/(p^2+a^2)$ $(p+b)/[(p+b)^2+a^2]$ $a/[(p+b)^2+a^2]$
δ函数	$\delta(t)$	1
微分	$df(t)/dt$ $d^2f(t)/dt^2$ $d^nf(t)/dt^n$	$pF(p)-f(0)$ $p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$ $p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
积分	$\int_0^t f(t)dt$	$F(p)/p$
褶积	$\int_0^t f(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(p)\cdot F_2(p)$

3.5.3 在振动问题中的应用

a. 常系数线性常微分方程式的解法

函数$x(t)$的n阶线性常微分方程式为

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx(t)}{dt}+a_n x(t)=f(t)$$

或简写成

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}\dot{x}+a_n x=f(t) \tag{a}$$

式中a_1，$a_2\cdots a_n$为给定常数，并设$x(t)$及其直至$(n-1)$阶为止的导数在$t=0$时的n个初始值$x(0)$，$\dot{x}(0)\cdots x^{(n-2)}(0)$，$x^{(n-1)}(0)$也都给定。首先，设$x(t)$及式(a)右边的函数$f(t)$的拉普拉斯变换分别为$X(p)$和$F(p)$，即

$$X(p)=\int_0^\infty e^{-pt}x(t)dt,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

或

$$x(t)\risingdotseq X(p),\qquad\qquad f(t)\risingdotseq F(p) \tag{b}$$

求式(a)两边的拉普拉斯变换，则得

$$\int_0^\infty e^{-pt}[x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}\dot{x}+a_n x]dt=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

由式（3.63）可得

$$
\begin{aligned}
&p^n X(p)-p^{n-1}x(0)-p^{n-2}\dot{x}(0)-\cdots-px^{(n-2)}(0)-x^{(n-1)}(0)\\
&+a_1[p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x(0)-p^{n-3}\dot{x}(0)-\cdots-x^{(n-2)}(0)]\\
&\quad\cdots\cdots\\
&+a_{n-1}[pX(p)-x(0)]\\
&+a_n X(p)=F(p)
\end{aligned}
$$

整理后得

$$
X(p)=\frac{Y(p)+F(p)}{Z(p)} \tag{3.69}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
Y(p)=&x(0)(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\cdots+a_{n-1})\\
&+\dot{x}(0)(p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\cdots a_{n-2})\\
&\cdots\cdots\\
&+x^{(n-2)}(0)(p+a_1)\\
&+x^{(n-1)}(0)\\
Z(p)=&p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n
\end{aligned}
$$

对经常出现的二阶微分方程式

$$
\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=f(t) \tag{c}
$$

则有

$$
\left.\begin{aligned}
Y(p)&=(p+2h\bar{\omega})x(0)+\dot{x}(0)\\
Z(p)&=p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2
\end{aligned}\right\} \tag{d}
$$

$Y(p)$和$Z(p)$都是p的多项式，$Y(p)$的次数至少比$Z(p)$低一次以上。$Z(p)$特称为辅助方程式、阻抗等，而$Z(p)=0$则称为特征方程式。

当由式（3.69）确定出$X(p)$后，按式(b)的第一式对$X(p)$求拉普拉斯逆变换，就可求得微分方程式的解$x(t)$。这样通过式（3.69）的运算，同时考虑所有初始条件并由代数运算求得微分方程通解，这种拉普拉斯变换解法具有重大意义。

b．自由振动

单质点阻尼系统的自由振动方程式如式（2.35）所示，即

$$
\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=0 \tag{e}
$$

设初始位移和初速度为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$。式(e)是式(c)中$f(t)=0$时的情况，所以有

$$
\left.\begin{aligned}
Y(p)&=(p+2h\bar{\omega})x_0+\dot{x}_0\\
Z(p)&=p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2\\
F(p)&=0
\end{aligned}\right\}
$$

式（3.69）则成

$$
X(p)=\frac{Y(p)}{Z(p)}=\frac{(p+2h\bar{\omega})x_0+\dot{x}_0}{p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2}
$$

进而可写成如下形式：

$$
X(p)=x_0\cdot\frac{p+h\bar{\omega}}{(p+h\bar{\omega})^2+(1-h^2)\bar{\omega}^2}+\frac{hx_0+\dot{x}_0/\bar{\omega}}{\sqrt{1-h^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}{(p+h\bar{\omega})^2+(1-h^2)\bar{\omega}^2}
$$

对上式中右边第一项和第二项可分别应用式（3.58)和(3.57)。因此，对$X(p)$求逆变换即可

得式(e)的通解$x(t)$为

$$x(t)=e^{-h\bar{\omega}t}\left[x_0\cos\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t+\frac{hx_0+\dot{x}_0/\bar{\omega}}{\sqrt{1-h^2}}\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t\right] \tag{f}$$

当然，式(f)与式（2.48）是一致的，这里不需要进行由初始条件从式（2.46）和（2.47）确定式（2.46）中的积分常数的运算。

c.强迫振动

与2.4.1节相同，考虑质点上作用谐和激振力$P(t)=P_0\sin\omega t$的情况。如式（2.73）所示，运动方程式为

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\frac{P_0}{m}\sin\omega t \tag{g}$$

假设系统是从静止状态开始运动的，初始条件为$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$。因此由式(d)有

$$Y(p)=0\,,\quad Z(p)=p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2 \tag{h}$$

同时，根据式（3.55），式(g)右边的拉普拉斯变换为

$$F(p)=\frac{p_0}{m}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

因而，式（3.69）变成

$$X(p)=(p_0\omega/m)\cdot 1/Q(p) \tag{i}$$

式中

$$Q(p)=(p^2+\omega^2)(p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2)$$

这个$Q(p)$就是例题3.2中$a=\omega$，$b=h\bar{\omega}$，$c=\bar{\omega}$时的情况，所以式(i)的$X(p)$作分数展开时

$$X(p)=\frac{B_1}{p-p_1}+\frac{B_2}{p-p_2}+\frac{B_3}{p-p_3}+\frac{B_4}{p-p_4} \tag{j}$$

从例题3.2的结果，便得

$$p_1=i\omega,\quad p_2=-i\omega,\quad p_3=-h\bar{\omega}+i\sqrt{1-h^2}\bar{\omega},\quad p_4=-h\bar{\omega}-i\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega} \tag{k}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=\frac{p_0}{m}\cdot\frac{1}{2i(\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega)}\\
B_2&=-\frac{p_0}{m}\cdot\frac{1}{2i(\bar{\omega}^2-\omega^2-2ih\bar{\omega}\omega)}\\
B_3&=\frac{p_0}{m}\cdot\frac{\omega/\bar{\omega}}{2i\sqrt{1-h^2}(\omega^2-\bar{\omega}^2+2h^2\bar{\omega}^2-2ih\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}^2)}\\
B_4&=-\frac{p_0}{m}\cdot\frac{\omega/\bar{\omega}}{2i\sqrt{1-h^2}(\omega^2-\bar{\omega}^2+2h^2\bar{\omega}^2+2ih\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}^2)}
\end{aligned}\right\}$$

先将式(j)中第三项与第四项结合起来求拉普拉斯逆变换，利用式（3.58）和（3.57）可得

$$x_{3,4}(t)=\frac{p_0}{m}\cdot\frac{e^{-h\bar{\omega}t}}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}\left[2h\bar{\omega}\omega\cos\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t-\frac{\omega/\bar{\omega}}{\sqrt{1-h^2}}(\bar{\omega}^2-\omega^2-2h^2\bar{\omega}^2)\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t\right] \tag{l}$$

然后求式(j)中第一项和第二项的拉普拉斯逆变换。这时，可利用式(3.55)和(3.56)，

$$x_{1,2}(t)=\frac{p_0}{m}\cdot\frac{(\bar{\omega}^2-\omega^2)\sin\omega t-2h\bar{\omega}\omega\cos\omega t}{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}$$

$$=\frac{p_0}{m}\cdot\frac{\sin(\omega t-\phi)}{\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+2h\bar{\omega}\omega)^2}}\qquad(\mathrm{m})$$

式中

$$\phi=\arctan[2h\bar{\omega}\omega/(\bar{\omega}^2-\omega^2)]$$

很明显，式(i) 中$X(p)$的逆变换，即作为式(g) 的解的系统反应$x(t)$，可表示为$x(t)=x_{3,4}(t)+x_{1,2}(t)$。这样利用拉普拉斯变换得到的系统反应$x(t)$，即式(l)与式(m)之和，当然与前面由式（2.79）和式（2.80）表示的结果是一致的。但是值得注意的是，这里初始条件已在式(h)的第一式中考虑，同时不需要像式（2.75）或（2.91）所示那样预先假定特解的形式，而是作为运算的必然结果推导出来的。

看一下式(l)和(m)所表示的时间函数的特性，或者从它们分别与式（2.79）的第一项和第二项相等这一点出发，就可知道$x_{1,2}(t)$表示稳态振动，而$x_{3,4}(t)$表示暂态振动。换句话说，在式(j)表示的拉普拉斯变换中，第一项和第二项表示稳态振动部分，第三项和第四项表示暂态振动部分。

如式(j)所示，反应$x(t)$的拉普拉斯变换$X(p)$具有四个极：p_1，p_2，p_3，p_4。这些值如式(k)所示。如果在复平面上表示这些极的位置，则如图3.25所示。如上所述，式(j)右边的第一、二项表示稳态振动，第三、四项表示暂态振动。与此相对照，图3.25的虚轴上的极对应稳态振动，复平面上第二、三象限内的极对应暂态振动。只要系统的阻尼比临界阻尼小，即$h<1$，在实轴上就不存在极。

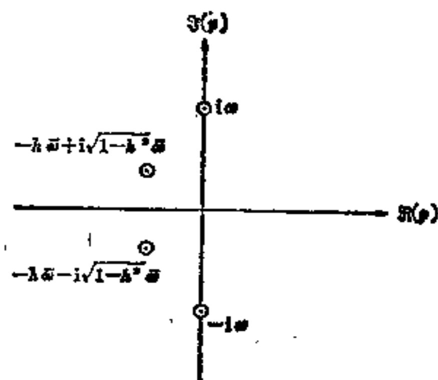


图3.25　极的位置

d.脉冲反应函数

如3.1节中所述，所谓单质点阻尼系统的脉冲反应函数，是指质点在具有单位冲量的冲击力作用下的反应时间过程。同时在3.5.2节中已说过，在$t=0$时刻作用的、具有单位冲量的冲击力，可用δ函数来表示。因此，处于静止状态的系统在$t=0$时刻受到这种冲击力作用时，其运动方程式为$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\delta(t)$，或写成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\frac{1}{m}\delta(t)\qquad(\mathrm{n})$$

初始条件为

$$x(0)=0\,,\ \dot{x}(0)=0\qquad(\mathrm{o})$$

所以，与式(h)相同，$Y(p)=0$，$Z(p)=p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2$，由式（3.60），式(n)右边的拉普拉斯变换为$F(p)=1/m$。因此式（3.69）变成

$$X(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{p^2+2h\bar{\omega}p+1}=\frac{1}{m\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}\cdot\frac{\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}{(p+h\bar{\omega})^2+(\sqrt{1-h^2}\bar{\omega})^2}\qquad(\mathrm{p})$$

由式（3.57）可得

$$x(t)=\frac{1}{m\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t\qquad(3.70)$$

因为$\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}=\bar{\omega}_d$，式（3.70）与位移的脉冲反应函数即式（3.5）的第1式是一致的。

e.频率响应函数

设对单质点阻尼系统施加谐和激振力$me^{i\omega t}$，即每单位质量上加如下谐和激振力

$$f(t)=e^{i\omega t} \tag{3.71}$$

则式（c）成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=e^{i\omega t} \tag{q}$$

阻抗为$Z(p)=p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2$。同时根据式（3.48），式（q）右边的拉普拉斯变换为$F(p)=1/(p-i\omega)$。

如果只考虑由式（3.71）的激振所产生的稳态振动，首先对初始条件部分即式（3.69）的$Y(p)$取$Y(p)=0$，则

$$X(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{1}{(p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2)(p-i\omega)} \tag{r}$$

再如本节c小节中所述，在将式（r）作部分分数展开时，只取与虚轴上的极（即$p=i\omega$）相对应的项就可以了。在这里则不必作部分分数展开，因为极$i\omega$的留数为

$$B=\frac{1}{(i\omega)^2+2h\bar{\omega}(i\omega)+\bar{\omega}^2}=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}$$

由式（3.48）便可得

$$x(t)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t} \tag{3.72}$$

式（3.72）与式（3.71）之比，即式（3.72）中$e^{i\omega t}$的系数

$$H(\omega)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega} \tag{3.73}$$

是对质点相对位移激振力的频率响应函数。这与上一章中的式（2.96）是一致的。

f.对任意地面运动加速度的反应

一般考虑地面运动加速度给定为一个任意的时间过程$\ddot{y}(t)$时，系统的运动方程式如式（2.100）所示：

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=-\ddot{y}(t)$$

设系统从静止状态开始运动，初始条件为$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$。如$x(t)$的拉普拉斯变换为$X(p)$，则根据初始条件，式（3.69）中$Y(p)=0$，阻抗为$Z(p)=p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2$。同时

$$F(p)=-\int_0^{\infty}e^{-pt}\ddot{y}(t)dt \tag{s}$$

所以，式（3.69）成

$$X(p)=\frac{1}{Z(p)}\cdot F(p)$$

即$X(p)$为$1/Z(p)$与$F(p)$两项之积。首先求$1/Z(p)$的逆变换，与式(p)的情况相同，改写为

$$\frac{1}{Z(p)}=\frac{1}{p^2+2h\bar{\omega}p+\bar{\omega}^2}=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}\cdot\frac{\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}{(p+h\bar{\omega})^2+(\sqrt{1-h^2}\bar{\omega})^2}$$

由式（3.57）得

$$\frac{1}{\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t \sqsupset \frac{1}{Z(p)} \tag{t}$$

对于$F(p)$的逆变换，很明显从式(s)可得

$$-\ddot{y}(t)\sqsupset F(p) \tag{u}$$

因此，根据式（3.67)，式(t)和式(u)右边的乘积$x(p)$的逆变换可由这两式左边的原函数之褶积来表示

$$x(t)=-\frac{1}{\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}}\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h\overline{\omega}(t-\tau)}\sin\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}(t-\tau)\,d\tau$$

上式与已由式（3.19)求得的结果相同。

3.6 频率分析

在3.3节中，用式(3.24)所示的脉冲反应函数来表示单质点阻尼系统的特性。如式(3.23)所示，通过计算脉冲反应函数与地面运动加速度的褶积来评价系统对地面运动加速度的反应。这些分析都是在时间域内进行的，称为时程分析。与此相对应，则是用2.5.3节中所述的频率反应函数来表示系统特性、进行频(率)域分析来求系统反应的方法。本节就是论述这种频率分析方法的。

3.6.1 谐和振动与周期振动

a.谐和振动

以前已经讲过，时间过程可用最简单的余弦函数或正弦函数(即$A\cos\omega t$或$A\sin\omega t$)表示的振动称为简谐振动。如经常讲到的那样，这里的A，B和ω都是与时间无关的常数，分别称为简谐振动的振幅和圆频率。

如经常出现的那样，某个振动量$f(t)$有时也可以表示为两个圆频率相等的简谐振动之和，即

$$f(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{3.74}$$

上式也可以表示成如下形式的函数：

$$f(t)=C\cos(\omega t+\phi) \tag{3.75}$$

或

$$f(t)=C\sin(\omega t+\phi) \tag{3.76}$$

式中ϕ称为相位差，是个常数。

式(2.92)等公式中用复指数函数表示振动量$f(t)$

$$f(t)=Ce^{i\omega t}$$

式中C一般是复数，称为复振幅，但也可为实数。当C是实数时，由式(2.24)所示欧拉公式可得$f(t)=C\cos\omega t+iC\sin\omega t$，表示这是实数部和虚数部分别由余弦函数和正弦函数表示的简谐振动。当C为复数、A和B为实数，C表示成$C=A+iB$时，也可根据欧拉公式将式(3.77)改写成

$$f(t)=|C|e^{i(\omega t+\phi)} \tag{3.78}$$

式中

$$|C|=\sqrt{A^2+B^2},\quad \phi=\arctan(\pm B/A)$$

式(3.78)的实部和虚部分别表示式(3.75)和式(3.76)形式的振动。式(3.74)、(3.75)、(3.76)、(3.77)或(3.78)所表示的振动称为谐和振动。这些式子所表示的函数$f(t)$都满足如下微分方程式：

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}+\omega^2 f(t)=0 \qquad \omega^2>0 \tag{3.79}$$

换言之，式(3.79)形式的微分方程式的解所表示的振动是谐和振动，这在2.25节中也已说过。简谐振动是最简单形式的谐和振动。图3.26(a)是谐和振动的一个例子。

作为式(2.35)，即如$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=0$那样包含阻尼项的微分方程式的解代表一种有阻尼的振动，即如式(2.41)所示的那种振动，其振幅是随时间变化的，一般说来不是谐和振动。但即使包含阻尼项，如果仅着眼于如式(2.79)的第二项或式(3.72)那样由谐和激振力产生的强迫振动的稳态振动部分，它仍是谐和振动。

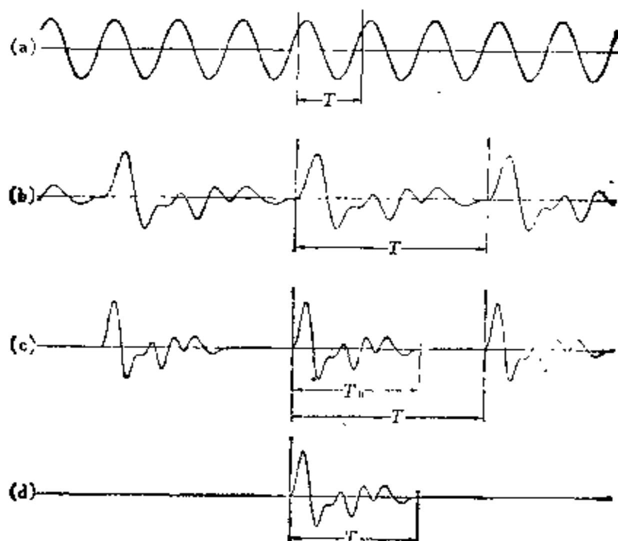


图3.26 谐和振动、周期振动、非周期振动

b.非谐和振动

不同频率的谐和振动之和不再是谐和振动。也就是说，例如由函数

$$f(t)=\sin\omega t+\sin 2\omega t$$

或

$$f(t)=(A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t)+A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t) \qquad \omega_1\neq\omega_2$$

等，以及由更一般的形式写成的函数

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t) \tag{3.80}$$

或由复数形式写成的函数

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{i\omega_k t} \tag{3.81}$$

所代表的振动，都不是谐和振动。很明显，这是因为这些函数都不满足式(3.79)形式的微分方程式。不是谐和振动的振动统称为非谐和振动。图3.26(b)是式(3.80)形式的函数所表示的非谐和振动的一个例子。

c.周期振动

时间t的某个函数$f(t)$，当它具有一个与t值无关的常数c使$f(t+c)=f(t)$成立时，这个函数就称为周期函数。c就是其周期。周期c中绝对值最小的非零周期称为基本周期。设基本周期为T，则下式自然成立：

$$f(t+T)=f(t) \tag{3.82}$$

同样，很明显下式也是成立的：

$$f(t+nT)=f(t) \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$$

实际上，常常把基本周期简称为周期。

其状态由周期函数表示的振动，即每隔一定时间重复同一状态的振动，叫做周期振动或者说是周期性的。式(3.75)表示的振动为

$$f(t)=C\cos(\omega t\pm\phi)$$
$$=C\cos(\omega t\pm\phi+2\pi)$$
$$=C\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\pm\phi\right]$$

故它是周期为$T=2\pi/\omega$的周期振动。另外，根据欧拉公式(2.24)，$e^{2\pi i}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$，所以式(3.78)便变成

$$f(t)=Ce^{i(\omega t\pm\phi)}=Ce^{i(\omega t\pm\phi)}\cdot e^{2\pi i}=Ce^{i[\omega(t+2\pi/\omega)\pm\phi]}$$

同样每隔周期$T=2\pi/\omega$重复同一状态。所以，谐和振动都是周期振动。

式(3.80)或式(3.81)的非谐和振动是不同周期的谐和振动之和，是以级数来表示的。级数中的各项，即

$$\left.\begin{array}{l}(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t)\\ C_k e^{i\omega_k t}\end{array}\right\}\qquad k=1,2\cdots n$$

称为非谐和振动的谐和振动分量。现设各谐和振动分量的圆频率ω_k($k=1,2\cdots n$)均为某圆频率ω_0的整数倍。这个频率叫做基本圆频率，而$\nu_0=\omega_0/2\pi$叫做基本频率。用音响学术语来说，ω_0就是基音的圆频率，ω_k则均为倍音的圆频率。这时，很明显每隔一个与ω_0对应的周期$T=2\pi/\omega_0$或$T=1/\nu_0$，就重复同一状态，所以这种非谐和振动是周期振动。图3.26(b)就是这种非谐和周期振动的一例。上面所说的各谐和振动分量的频率，只要都是某个基本频率的整数倍，即只要式(3.80)或(3.81)的非谐和振动可以用下面的式子来表示：

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t)\tag{3.83}$$

或

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{ik\omega_0 t}\tag{3.84}$$

则即使$n\to\infty$，即级数的项数无限多，它也还是周期振动。

2.3节中所说的有阻尼自由振动不是周期振动。因为从图2.18也可看出，它是不可能严格重复同一状态的。这时称$T_d=1/\sqrt{1-h^2}\cdot2\pi/\bar{\omega}$为有阻尼自由振动的周期，这是因为如将式(3.82)的条件稍微放松一下，可变成

$$f(t+T)\doteq f(t)$$

习惯上可将每隔一定时间大致重复同一状态的振动看作为周期振动。

d．非周期振动

如图3.26(c)所示，经过一定时间T_0后振动一度停止，在持续一段静止状态后又重复相同的振动、静止状态，这种振动仍是具有图示周期T的周期振动。

考虑T_0仍保持不变而静止状态的时间延长到$T\to\infty$的极限状态，如图3.26(d)所示。这表法由于周期函数的周期变成无限大，周期函数失去了周期性，成了前后都不可能重复同一状态的振动。这种振动称为非周期振动或是非周期性的。像地震动等就是非谐和非周期振动。如上所述，由于周期变成$T\to\infty$的极限，振动始点和终点的存在，因而还有振动的持续时间以及因果性时间函数的概念就变得明确了。

3.6.2 对谐和激振的反应——频率响应函数

关于频率响应函数，已在2.5.3节和3.5.3e节中作了叙述，因为这是本节中要讲的频率

分析的基础，所以这里重新以一般形式作一归纳。

当通常以函数$P(t)$表示的激振力作用于单质点阻尼系统的质点上时，系统的运动方程式可以表示为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P(t) \tag{a}$$

或

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\frac{P(t)}{m} \tag{3.85}$$

$P(t)$具有力的量纲，通常称为对系统的激振力或输入。

当输入由振幅为P_0、并如图3.26(a)所示的谐和振动力给出时，即当

$$P(t)=P_0e^{i\omega t} \tag{b}$$

时，式(3.85)变成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\frac{P_0}{m}e^{i\omega t}$$

根据式(2.95)，该式的稳态解为

$$x(t)=\frac{P_0}{m(\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega)}e^{i\omega t} \tag{c}$$

现在假定系统受位移振幅为a、圆频率为ω的谐和地面振动激振，地面运动的位移、速度和加速度分别为如下的谐和振动：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{位　移} & y(t)=ae^{i\omega t}\\ \text{速　度} & \dot{y}(t)=i\omega ae^{i\omega t}\\ \text{加速度} & \ddot{y}(t)=-\omega^2ae^{i\omega t}\end{array}\right\} \tag{3.86}$$

同时，根据§2.5.1所讲的等效激振力概念，这时的输入力为

$$P(t)=-m\ddot{y}(t)=m\omega^2ae^{i\omega t} \tag{d}$$

上式右边是严格意义的输入力。如果广义地解释输入的意义，则常常不仅将具有力的量纲的量，而且把产生这种输入力的扰动，即式(3.86)所示的位移、速度和加速度等，都称为输入。

比较式(b)和式(d)可知$P_0=m\omega^2a$，所以可以立即从式(c)求出系统的位移反应。再对时间微分，就可求出速度反应和加速度反应

$$\left.\begin{array}{ll}\text{位移反应} & x(t)=\dfrac{\omega^2a}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t}\\ \text{速度反应} & \dot{x}(t)=\dfrac{i\omega^3a}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t}\\ \text{绝对加速度反应} & \ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)=-\dfrac{\omega^2a(\bar{\omega}^2+2ih\bar{\omega}\omega)}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}e^{i\omega t}\end{array}\right\} \tag{3.87}$$

它们均为谐和振动。系统对这种输入的反应统称为输出。与输入一样，输出的意义也是广义的，不一定是具有力的量纲的量。

通常将系统受谐和激振而作谐和振动时的输出与输入之比称为频率响应函数。例如考虑下面两种情况的输出/输入，其对应的频率响应函数分别为

绝对加速度反应/地面加速度　　$H(\omega)=\dfrac{\bar{\omega}^2+2ih\bar{\omega}\omega}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}$

位移反应/地面速度　　$H(\omega)=\dfrac{-i\omega}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}$

这是已在前面2.5.3节中求出的函数。频率响应函数是只由输入频率ω和系统固有特性值来表示的复函数，它包含了有关两个谐和振动量之间的振幅比及相位差的信息，其绝对值就是所谓反应放大倍数，这些在2.5.3节中也都已经讲过。

如果作谐和振动的地面运动输入由式（3.86）所示的加速度、速度和位移中任意一个给出，系统的输出由式(3.87)所示的三种反应表示，则作为输出与输入之比可以定义如表3.3中所示的九种频率响应函数。

一般在作谐和振动的系统中，分别以F和G表示广义的输入和输出的复振幅，以$\hat{H}(\omega)$表示频率响应函数，它们之间的关系为

$$G=\hat{H}(\omega)\cdot F \tag{3.88}$$

$$F=G/\hat{H}(\omega) \tag{3.89}$$

$$\hat{H}(\omega)=G/F \tag{3.90}$$

表3.3　　单质点阻尼系统对地面运动的频率响应函数$\hat{H}(\omega)$

输入 \ 输出		反应		
		加速度反应	速度反应	位移反应
地面运动	加速度	$\omega^2H(\omega)+1$	$-i\omega H(\omega)$	$-H(\omega)$
	速度	$i\omega[\omega^2H(\omega)+1]$	$\omega^2H(\omega)$	$-i\omega H(\omega)$
	位移	$-\omega^2[\omega^2H(\omega)+1]$	$i\omega^3H(\omega)$	$\omega^2H(\omega)$

$$H(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2ih\omega_0\omega}$$

在2.5.3节或§3.5.3e中求频率响应函数时，已事先说明考虑由初始条件所决定的暂态振动完全衰减消失后的状态，或者说只考虑与初始状态无关的虚轴上的极。但从本质上来说，频率响应函数是把属于由式(3.83)所定义的、或由图3.26(a)所示周期振动的一类谐和振动为研究对象时所引出的概念，因此可以理解为没有初始起点。

3.6.3　有限富里哀近似

如图3.26(b)所示，设非谐和周期函数$f(t)$的周期为T。如式（3.83)所示对应于周期T的基本圆频率为$\omega_0=2\pi/T$，频率分别为其整数倍的谐和振动分量之和，是周期为T的非谐和周期振动。

我们可以试用这种有限个谐和振动分量之和$S_n(t)$来近似表示给定的函数$f(t)$

$$S_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(A_k\cos k\omega_0t+B_k\sin k\omega_0t) \tag{a}$$

上式可以改写成

$$S_n(t)=A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos k\omega_0t+B_k\sin k\omega_0t) \tag{3.91}$$

注意，上式与式（3.83）相比，多了一个常数A_0。这个常数的意义将在后面再讲，加上这个常数后不会对函数的周期性产生任何影响。

A_k，B_k为待定系数，在确定这些系数时，应该使式(a)的有限三角级数$S_n(t)$能最好地近似表示函数$f(t)$。为此，采用如下所述的最小二乘法。

以$S_n(t)$近似表示$f(t)$时的误差为$f(t)-S_n(t)$，其平方值在一个周期内即从0到T时间内的平均值为

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t) - S_n(t)]^2 \mathrm{d}t \tag{3.92}$$

ε 是A_k，B_k（$k=0,1,2\cdots n$）的函数。当系数A_k，B_k满足如下条件时，积分 ε 取最小值，即可以得到最佳近似值。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_k} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_k} = 0 \qquad k=0,1,2\cdots n$$

现将式（3.92）对某个系数A_l（l 为整数）微分，并使其等于 0，便得

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_l} = -\frac{2}{T}\int_0^T [f(t) - S_n(t)] \frac{\partial S_n(t)}{\partial A_l} \mathrm{d}t = 0 \tag{b}$$

由式(a)可得

$$\frac{\partial S_n(t)}{\partial A_l} = \cos l\omega_0 t$$

将上式与式(a)代入式(b)，便得

$$-\frac{2}{T}\int_0^T \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n} A_k \cos k\omega_0 t - \sum_{k=0}^{n} B_k \sin k\omega_0 t \right] \cos l\omega_0 t \mathrm{d}t = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \left[\frac{2}{T}\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos l\omega_0 t \mathrm{d}t\right] + \sum_{k=0}^{n} B_k \left[\frac{2}{T}\int_0^T \sin k\omega_0 t \cos l\omega_0 t \mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos l\omega_0 t \mathrm{d}t \tag{c}$$

对三角函数的积分，有如下的三角函数正交性关系：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & k = l \neq 0 \\ 0 & k \neq l \end{cases} \\
&\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & k = l \neq 0 \\ 0 & k \neq l \end{cases} \\
&\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.93}$$

另外

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin kx \mathrm{d}x = 0 \tag{3.94}$$

在式（3.93）和式（3.94）中作变量变换 $x=\omega_0 t=(2\pi/T)t$，则变成

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{T}\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos l\omega_0 t \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & k = l \neq 0 \\ 0 & k \neq l \end{cases} \\
&\frac{2}{T}\int_0^T \sin k\omega_0 t \sin l\omega_0 t \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & k = l \neq 0 \\ 0 & k \neq l \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{3.95}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^T \cos k\omega_0 t \sin l\omega_0 t \mathrm{d}t = 0 \\
&\int_0^T \cos k\omega_0 t \mathrm{d}t = \int_0^T \sin k\omega_0 t \mathrm{d}t = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.96}$$

因此，根据式(3.95)的第三个式子，式(c)左边的第二项全为 0，而根据式(3.95)的第一个式子，式(c)左边的第一项在 $k \neq l$ 时全为 0，$k=l$ 时方括号内为 1，所以得到

$$A_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt \qquad k=1,\ 2\cdots n \tag{d}$$

同样，将式(3.92)对系数B_k微分，根据式(3.95)的第二式和第三式可得

$$B_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_0 t\,dt \qquad k=1,\ 2\cdots n \tag{e}$$

另外，A_0值可以用如下方法来求，由式(3.91)，有

$$\frac{\partial S_n(t)}{\partial A_0}=1$$

所以式(c)成

$$\int_0^T A_0\,dt+\sum_{k=1}^{n}\int_0^T (A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t)\,dt=\int_0^T f(t)\,dt$$

由式(3.96)上式左边第二项为0。所以，

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{f}$$

由此可以知道，式(3.91)中的常数项A_0表示所给定的函数$f(t)$在一个周期内的平均值。另外，比较式(f)和式(d)可得

$$A_0=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt\right]_{k=0}$$

所以，如果最初将式(3.91)中的常数项表示成如下形式

$$S_n(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{k}(A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t)$$

即以$A_0/2$表示函数$f(t)$的平均值，则A_0也可与$k=1,\ 2\cdots n$时一样用式(d)来表示。对应于B_0的项始终为0。所以，既可以认为B_0从开始就不存在，也可以看作由式(e)来统一表示而$B_0=0$。

综上所述，给定周期为T的任意非谐和周期函数$f(t)$时，可以用如下的有限三角级数来近似表示

$$S_n(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t) \tag{3.97}$$

式中$\omega_0=2\pi/T$。换句话说，可以用其频率为基本圆频率ω_0整数倍的有限个谐和振动分量之和来近似表示所给定的非谐和周期函数$f(t)$。这时，当式(3.97)中的系数由下式给出时，能得到最佳的近似

$$\left.\begin{aligned}A_k&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt\\B_k&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_0 t\,dt\end{aligned}\right\} \tag{3.98}$$

这种近似表达式，即式(3.97)，称为给定函数$f(t)$的有限富里哀近似，由式(3.98)所确定的系数A_k，B_k称为有限富里哀系数。在特别需要区别A_k和B_k时，也常称A_k为有限富里哀余弦系数，B_k为有限富里哀正弦系数。

【例题3.3】 用有限富里哀近似表达式表示图3.27所示非谐和周期函数。

〔解〕图3.27的函数可表示为

$$
f(t)=\begin{cases} 4at/T & 0\leqslant t\leqslant T/4 \\ 4a(T/2-t)/T & T/4\leqslant t\leqslant T/2 \\ 0 & T/2\leqslant t\leqslant T \end{cases} \tag{g}
$$

代入式(3.98)，积分得

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4}\frac{4at}{T}\cos\frac{2\pi kt}{T}\mathrm{d}t+\int_{T/4}^{T/2}\frac{4a(T/2-t)}{T}\cos\frac{2\pi kt}{T}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{a}{(k\pi/2)^2}\cos\frac{k\pi}{2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}\right) \\
B_k &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4}\frac{4at}{T}\sin\frac{2\pi kt}{T}\mathrm{d}t+\int_{T/4}^{T/2}\frac{4a(T/2-t)}{T}\sin\frac{2\pi kt}{T}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{a}{(k\pi/2)^2}\sin\frac{k\pi}{2}
\end{aligned}
$$

对系数A_k，B_k计算到$k=3$为止所得的结果列于表3.4。

另外，将这些k值代入式(3.97)，算出取到$n=0$，1，2，3为止的$S_n(t)$，分别称为第0，1，2，3次近似，则这些近似曲线的形状如图3.28中的实线所示。第0次近似$S_0(t)=A_0/2$，如前面所述，只是给定函数$f(t)$的平均值。

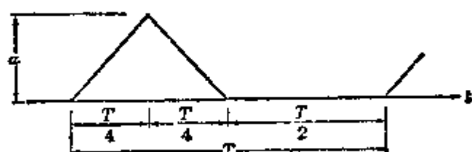


图3.27　非谐和周期函数的例子

表3.4　有限富里哀系数

k	A_k/a	B_k/a
0	1/2	0
1	0	$4/\pi^2$
2	$-2\pi^2$	0
3	0	$-4/9\pi^2$

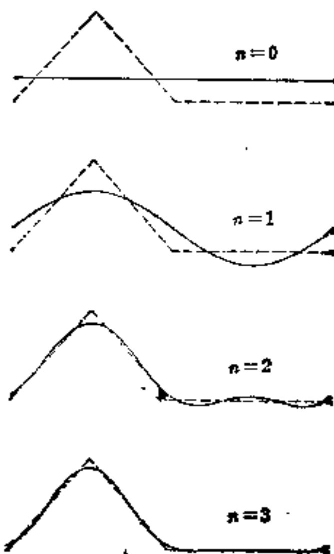


图3.28　有限富里哀近似的例子

3.6.4　富里哀级数

设给定周期为T的函数$f(t)$可用下式所示的第n次有限富里哀近似来近似表示：

$$
S_n(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t) \tag{a}
$$

以ε_n来表示其误差平方的平均值，则如式(3.92)所示，有

$$
\varepsilon_n=\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)-S_n(t)]^2\mathrm{d}t \tag{b}
$$

现在再来看第$n+1$次近似，由式(3.97)有

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}(t) &= \frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n+1}(A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t) \\
&= S_n(t)+A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t
\end{aligned} \tag{c}
$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A_{n+1}&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n+1)\omega_0 t\,\mathrm{d}t\\ B_{n+1}&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n+1)\omega_0 t\,\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

这时误差的均方值为

$$\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)-S_{n+1}(t)]^2\mathrm{d}t \tag{e}$$

代入式(c)，得

$$\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)-S_n(t)-A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t-B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]^2\mathrm{d}t$$

展开等号右边的被积项

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}=&\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)-S_n(t)]^2\mathrm{d}t\\ &-\frac{2}{T}\int_0^T f(t)[A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]\mathrm{d}t\\ &+\frac{2}{T}\int_0^T S_n(t)[A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]\mathrm{d}t\\ &+\frac{1}{T}\int_0^T[A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

首先，由式(b)，上式右边第一项为

$$\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)-S_n(t)]^2\mathrm{d}t=\varepsilon_n$$

由式(d)，第2项为

$$-\frac{2}{T}\int_0^T f(t)[A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]\mathrm{d}t=-A_{n+1}^2-B_{n+1}^2$$

由式(3.95)和(3.96)，第3项为

$$\frac{2}{T}\int_0^T S_n(t)[A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]\mathrm{d}t=0$$

由式(3.95)，第4项为

$$\frac{1}{T}\int_0^T[A_{n+1}\cos(n+1)\omega_0 t+B_{n+1}\sin(n+1)\omega_0 t]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}A_{n+1}^2+\frac{1}{2}B_{n+1}^2$$

所以，结果得

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n-\frac{A_{n+1}^2}{2}-\frac{B_{n+1}^2}{2}$$

但上式中$A_{n+1}^2\geq 0$，$B_{n+1}^2\geq 0$，所以有

$$\varepsilon_{n+1}\leq\varepsilon_n \tag{3.99}$$

由此可知，有限富里哀近似的项数n越多，误差越小，近似度越好。这从图3.28中也可以明显地看出来。但从式(e)也可以看出，ε_{n+1}是个正量的积分值，所以不可能是负数。因此当式(3.99)中$n\to\infty$时*，误差ε收敛于0。换句话说，给定周期为T的非谐和周期函数$f(t)$可以由$S_\infty(t)$来精确表示：

*原文误为$n\to 0$——译注。

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t) \tag{3.100}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
A_k&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\mathrm{d}t \qquad k=0,\ 1,\ 2\cdots\\
B_k&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_0 t\mathrm{d}t \qquad k=0,\ 1,\ 2\cdots\\
\omega_0&=\frac{2\pi}{T}
\end{aligned}\right\} \tag{3.101}$$

式(3.100)的右边称为函数$f(t)$的富里哀级数或富里哀展开。由式(3.101)确定的系数A_k，B_k称为函数$f(t)$的富里哀系数。前面所讲的有限富里哀近似是将富里哀级数到某一项为止截断的结果，即是富里哀级数的部分和。将非谐和周期函数$f(t)$看作一个振动量时，通过作富里哀展开就可把它完全分解成振幅的平均值和谐和振动分量。

在式(3.100)中，通常将和式的第k项，即

$$A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t$$

称为k阶谐和振动分量，或简称为k阶分量。有时也称为k阶振型。

k阶分量的圆频率为$k\omega_0=2\pi k/T$(rad/s)，频率为$k\omega_0/2\pi=k/T$(Hz)，周期为$T_k=T/k$(s)。k阶分量常常写成

$$A_k\cos k\omega_0 t+B_k\sin k\omega_0 t=X_k\cos(k\omega_0 t+\phi_k)$$

式中

$$X_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2}\ ,\qquad \phi_k=\arctan(-B_k/A_k) \tag{3.102}$$

这时，X_k是k阶分量的振幅，ϕ_k是k阶分量的初相位。另外，式(3.100)中的第一项$A_0/2$即表示函数的平均值的常数，严格说来并不是谐和振动分量。但为了方便起见，往往称它为0阶分量。

将图3.27中的非谐和周期函数作富里哀展开时，其0阶至3阶谐和振动分量如图3.29所示。将这些分量从0阶分量开始逐个迭加起来的结果，就是图3.28中的有限富里哀近似。从理论上讲，这种迭加进行到$k\to\infty$阶时就可以精确地重现图3.27的图形。

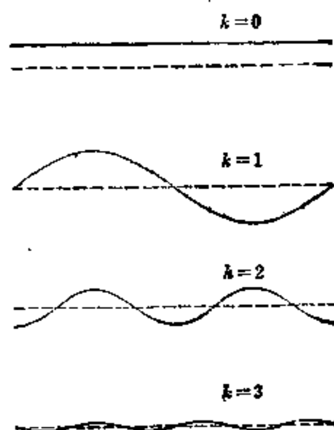


图3.29 富里哀展开后的谐和振动分量

式(3.100)并不总是成立的，也就是说，给定的函数并非总是可以作富里哀展开的。在数学上，函数$f(t)$必须满足某些条件才能作富里哀展开。即函数$f(t)$必须满足：

(i) 是一阶有界函数；

(ii) 分段连续。即可以有不连续点，但在一个周期内不连续点的数目有限，且在不连续点之间函数是连续的；

(iii) 在一个周期内只有有限个极大值和极小值。

上述条件称为狄里希利(Dirichlet)条件。

设在某个点t，从大于t的一边向它逼近时，函数的极限值为$f(t+0)$，从小于t的一边向

t 逼近时函数的极限值为$f(t-0)$。如果函数在t点连续，就有$f(t+0)=f(t-0)=f(t)$，如果函数在t点不连续，就有$f(t+0)\neq f(t-0)$。根据上面的条件(ii)，可以有有限个不连续点，但在不连续点上富里哀级数收敛于$f(t)=\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$。

作为一例，我们来看图3.30(a)上所画的三角波函数，即

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2a}{T}\left(\frac{T}{2}-t\right) & 0<t<\frac{T}{2}\\ \frac{2a}{T}\ (T-t) & \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

其富里哀展开式为

$$f(t)=a\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{k}\sin\frac{2\pi kt}{T}\right]$$

在不连续点上的值为$f(0)=f(T/2)=f(T)=a/2$。在富里哀展开式中取$k=6$为止的部分和，则所得结果如图3.30(b)所示。可以看出，在不连续点上曲线通过不连续量的1/2处。

另外要注意，在图3.30(b)中不连续点的附近，与虚线表示的给定函数的图形相比，曲线具有明显的过冲倾向。在图3.30(c)中所示的矩形波情况下，这种现象更为明显。图上的矩形波由下式给定：

$$f(t)=\begin{cases}-a/2 & 0<t<T/2\\ a/2 & T/2<t<T\end{cases}$$

富里哀展开式为

$$f(t)=-\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin\frac{2\pi kt}{T}$$

该级数的部分和$S_n(t)$如图3.30(d)所示，同样可以看到在不连续点附近有过冲现象，当$n\to\infty$时，过冲量约为不连续量的8.94%。这种对不连续函数作富里哀展开时所产生的异常现象称为吉伯斯(Gibbs)现象，在不连续点附近这是不可避免的。

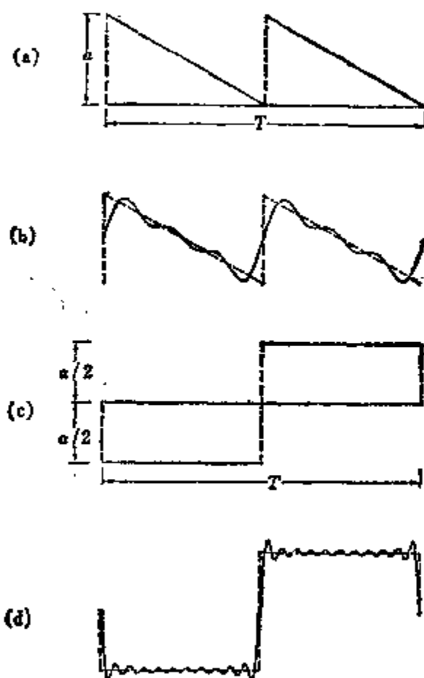


图3.30　不连续函数的富里哀展开

在工程意义上，狄里希利条件是一种极松的限制。只要是研究自然现象产生的输入和有阻尼系统在此输入下的反应，就不会受这种条件的约束。在振动开始或结束点上偶而出现不连续点时，只要注意到上述的吉伯斯现象等情况，在实用上富里哀展开就几乎不存在问题。

3.6.5　复富里哀级数

周期为T的任意非谐和周期函数可以用式(3.100)所示的富里哀级数来表示，富里哀系数则由式(3.101)确定。

由式(2.25)，$\cos k\omega_0 t$和$\sin k\omega_0 t$可以用复数表示为

$$\left.\begin{aligned}\cos k\omega_0 t&=\frac{e^{ik\omega_0 t}+e^{-ik\omega_0 t}}{2}\\ \sin k\omega_0 t&=\frac{e^{ik\omega_0 t}-e^{-ik\omega_0 t}}{2i}\end{aligned}\right\}$$

代入式(3.100)，同时在常数项$A_0/2$上加上0阶正弦系数$B_0=0$，则成

$$f(t)=\frac{A_0-\mathrm{i}B_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\frac{e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}+e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}}{2}+B_k\frac{e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}-e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}}{2\mathrm{i}}\right)$$

$$=\frac{A_0-\mathrm{i}B_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k-\mathrm{i}B_k}{2}e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}+\frac{A_k+\mathrm{i}B_k}{2}e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\right)$$

定义新的复系数

$$\left.\begin{aligned}C_k&=\frac{A_k-\mathrm{i}B_k}{2}\\C_0&=\frac{A_0-\mathrm{i}B_0}{2}\\C_{-k}&=\frac{A_k+\mathrm{i}B_k}{2}\end{aligned}\right\}\tag{3.103}$$

则$f(t)$可以写成如下简洁形式

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}$$

将式(3.101)代入式(3.103)的第一式，则得

$$C_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\cos k\omega_0 t-\mathrm{i}\sin k\omega_0 t)\mathrm{d}t\tag{a}$$

根据式(2.24)的第二式，上式可以写成

$$C_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\tag{b}$$

设式(a)中$k=0$和$k<0$，则很容易证明可以得出式(3.103)的第二式和第三式。所以可以知道，式(3.103)定义的复系数可以用式(b)来统一表示。

综上所述，满足狄里希利条件且周期为T的任意非谐和周期函数$f(t)$可以表示成

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\tag{3.104}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}C_k&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\\\omega_0&=2\pi/T\end{aligned}\right\}\tag{3.105}$$

式(3.104)等号右边称为函数$f(t)$的复富里哀级数，式(3.105)确定的系数则称为函数$f(t)$的复富里哀系数。从式(3.103)可以明显看出，富里哀系数A_k，B_k分别为

$$\left.\begin{aligned}A_k&=2\mathscr{R}(C_k)\\B_k&=-2\mathscr{I}(C_k)\end{aligned}\right\}\quad k=0,\ 1,\ 2\cdots\tag{3.106}$$

另外，如果用符号*表示共轭复数，则有

$$C_{-k}=C_k^*\tag{3.107}$$

3.6.6 对非谐和周期激振的反应

将式(3.85)写成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=f(t)\tag{3.108}$$

$f(t)$为谐和振动输入，如表示为$f(t)=Ce^{i\omega t}$，则式(3.108)成$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=Ce^{i\omega t}$。在3.6.2节中已说过，由此式求出的输出，如系统的位移反应，为

$$x(t)=H(\omega)Ce^{i\omega t} \tag{a}$$

$H(\omega)$为频率响应函数，在这里可表示为

$$H(\omega)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega} \tag{3.109}$$

当所求的输出为系统的加速度、速度和位移反应等，输入$f(t)$为地面运动加速度、速度、位移等时，对应各种不同的组合，可以用表3.3所列出的频率响应函数。

当输入$f(t)$为由非谐和周期函数表示的振动时，可以用式(3.104)的复富里哀级数将其表示成谐和振动分量之和

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}$$

运动方程式则成

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t} \tag{3.110}$$

上式为线性微分方程式，因为等式右边是谐和振动的线性组合，所以，方程式的解是对右边各项(即各谐和振动分量)求得的如式(a)形式的解的线性组合，即

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H(k\omega_0)C_k e^{ik\omega_0 t} \tag{3.111}$$

3.6.7 富里哀变换

根据式(3.104)和(3.105)，图3.26(c)所示的周期为T的非谐和周期函数$f(t)$可以用复富里哀级数表示成谐和振动分量之和

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t} \tag{a}$$

式中

$$C_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt \tag{b}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{c}$$

同时，在3.6.1.d节中已经说过，图3.26(d)所示的非谐和非周期振动，即只在有限时间段T_0内发生而不能重复出现完全相同状态的振动现象，可由非谐和周期振动的周期T趋于无穷大而得到。因此，在式(a)—(c)中取$T\to\infty$的极限，就可得到非谐和非周期振动的富里哀展开式。

现在设式(b)中

$$k\omega_0=\omega \tag{d}$$

则C_k为ω的函数，可设

$$C_k=\frac{\omega_0}{2\pi}F(\omega) \tag{e}$$

但C_k是只对k为整数时才有意义的离散值，k阶圆频率与$(k+1)$阶圆频率之差为$\Delta\omega=$

$(k+1)\omega_0-k\omega_0=\omega_0$，由式(c)可写成

$$\Delta\omega=\omega_0=2\pi/T \tag{3.112}$$

因此，式(e)可表示成

$$C_k=\frac{1}{2\pi}F(\omega)\Delta\omega \tag{3.113}$$

求$T\to\infty$时的极限，由式(3.112)有$\Delta\omega\to 0$，将式(3.113)和式(d)代入式(a)，便得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\Delta\omega$$

用积分表示为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

同时，式(b)可写成

$$\frac{2\pi C_k}{\omega_0}=\frac{2\pi}{T\omega_0}\int_0^T f(t)e^{-i\omega t}dt$$

由式(e)可知，上式左边为$F(\omega)$，而由式(c)，上式右边的$T\omega_0$等于2π。因而上式可写成：

$$F(\omega)=\int_{t=0}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

总结以上所述，任意非谐和的非周期函数$f(t)$可以表示成

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{3.114}$$

式中

$$F(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{3.115}$$

这里是以图3.26(d)所示的非周期函数在$T\to\infty$时的情况作为研究对象的，所以$t<0$时$f(t)=0$，即$f(t)$是因果性时间函数。因此，式(3.115)写成下式时积分值也一样

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

根据§3.5.1中的定义，式(3.115)的$F(\omega)$是以$e^{-i\omega t}$为核的函数$f(t)$的积分变换，而式(3.114)为其逆变换，我们称$F(\omega)$为$f(t)$的富里哀变换，$f(t)$为$F(\omega)$的富里哀逆变换。同时，称具有这种关系的函数$f(t)$和$F(\omega)$互为富里哀变换对，可用符号表示成$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$或

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega) \tag{3.116}$$

上节所述的周期函数的富里哀级数展开中，富里哀系数是作为离散量给出的，用整数值k表示频率阶数，对应每个k值给出一个富里哀系数。而非周期函数的富里哀变换相当于将富里哀级数的间隔无限缩小变为积分的结果，因此富里哀变换是对频率的连续量。

由式(3.115)可知，一般情况下富里哀变换是复函数，可以写成将实部与虚部分开的形式

$$F(\omega)=\mathscr{R}[F(\omega)]+i\mathscr{I}[F(\omega)] \tag{3.117}$$

所以，根据式(2.63)和式(2.64)，可以表示成

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{i\phi(\omega)} \tag{3.118}$$

式中

$$|F(\omega)|=\sqrt{(\mathscr{R}[F(\omega)])^2+(\mathscr{I}[F(\omega)])^2} \tag{3.119}$$

$$\phi(\omega)=\arctan\frac{\mathscr{I}[F(\omega)]}{\mathscr{R}[(F\omega)]} \tag{3.120}$$

式(3.119)的$|F(\omega)|$称为富里哀振幅，式(3.120)的$\phi(\omega)$则称为富里哀相位角。

如果用频率$\nu=\omega/2\pi$来代替圆频率ω，则富里哀变换和富里哀逆变换可表示成

$$\left.\begin{aligned}&F(\nu)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t\\&f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\nu)\mathrm{e}^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu\\&f(t)\rightharpoondown F(\nu)\end{aligned}\right\} \tag{3.121}$$

在实用上往往采用这种形式。

3.6.8 富里哀变换的性质

富里哀逆变换式(3.114)的物理意义可以理解为：非谐和的非周期振动$f(t)$可以用所有频率介于ω与$\omega+\mathrm{d}\omega$之间、振幅为$F(\omega)\mathrm{d}\omega/2\pi$的谐和振动分量的迭加来表示。

将富里哀变换式(3.115)与§3.5.1中所述的拉普拉斯变换相比较就可知道，在式(3.43)中设$\mathscr{R}(p)$，$=0$ $\mathscr{I}(p)=\omega$，若取p为纯虚数，则立即可得式(3.115)。也就是说，富里哀变换只是拉普拉斯变换的一种特殊情况。因此，关于拉普拉斯变换的下列特性，对富里哀变换也同样成立。即当设a，b，c为常数，且有

$$f(t)\rightharpoondown F(\omega),\ f_1(t)\rightharpoondown F_1(\omega),\ f_2(t)\rightharpoondown F_2(\omega)$$

时，便有

(i) 线性 $cf(t)\rightharpoondown cF(\omega)$ (3.122)

(ii) 加法律 $af_1(t)+bf_2(t)\rightharpoondown aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$ (3.123)

(iii) 频移 $\mathrm{e}^{-iat}f(t)\rightharpoondown F(\omega+a)$

(iv) δ函数 $\delta(t)\rightharpoondown 1$

(v) 微分 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\rightharpoondown i\omega F(\omega)-f(0)$

$$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\rightharpoondown-\omega^2F(\omega)-i\omega f(0)-f'(0)$$

(vi) 积分 $\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\rightharpoondown\frac{1}{i\omega}F(\omega)$

(vii) 褶积 $f_1(t)*f_2(t)\rightharpoondown F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

此外，还可以补充一些富里哀变换的重要特性：

(viii) 实函数 由式(2.24)，式(3.115)的富里哀变换可以写成下式：

$$F(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}f(t)(\cos\omega t-i\sin\omega t)\mathrm{d}t$$

所以，如果$f(t)$为实函数，就有

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{R}[F(\omega)]=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\\&\mathscr{I}[F(\omega)]=-\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{3.130}$$

很明显，实部$\mathscr{R}[F(\omega)]$是ω的偶函数，虚部$\mathscr{I}[F(\omega)]$是ω的奇函数。即

$$\mathscr{R}[F(-\omega)]=\mathscr{R}[F(\omega)],\quad \mathscr{I}[F(-\omega)]=-\mathscr{I}[F(\omega)] \tag{3.131}$$

由此可知，$F(\omega)=\mathscr{R}[F(\omega)]+\mathrm{i}\,\mathscr{I}[F(\omega)]$，$F(-\omega)=\mathscr{R}[F(-\omega)]+\mathrm{i}\,\mathscr{I}[F(-\omega)]=\mathscr{R}[F(\omega)]-\mathrm{i}\,\mathscr{I}[F(\omega)]$。即下列共轭关系成立

$$F(-\omega)=F^*(\omega) \tag{3.132}$$

反之，很容易证明当(3.132)式成立时，$f(t)$必为实函数。因此，式(3.132)是$f(t)$为实函数的充分必要条件。

因为本书中表示所研究的振动量的时间函数几乎均为实函数，所以，其富里哀变换都有式(3.132)的关系。

式(3.114)可以写成

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathscr{R}[F(\omega)]+\mathrm{i}\,\mathscr{I}[F(\omega)]\}(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t-\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t\}d\omega\\&\quad+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathscr{R}[F(\omega)]\sin\omega t+\mathscr{I}[F(\omega)]\cos\omega t\}d\omega\end{aligned}$$

$f(t)$为实函数时，等号右边第二项的虚部为0，所以实函数的富里哀逆变换可表示成

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t-\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t\}d\omega$$

但由于$f(t)$为实函数时式(3.131)成立，上式中的$\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t$和$\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t$均为$\omega$的偶函数。因此富里哀逆变换可以表示成

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\{\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t-\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t\}d\omega \tag{a}$$

或者，利用式(3.119)和(3.120)，表示成

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(\omega)|\cos[\omega t+\phi(\omega)]d\omega \tag{3.133}$$

另外，如将式(a)右边看作变量t的函数，则$\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t$为偶函数，$\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t$为奇函数。所以，当实函数$f(t)$为偶函数或奇函数时，可以分别表示成

$$\left.\begin{aligned}&\text{偶函数}\quad f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t\,d\omega\\&\text{奇函数}\quad f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t\,d\omega\end{aligned}\right\} \tag{3.134}$$

(ix) 因果性　对给定的任意函数$f(t)$，可以将其分解成偶函数和奇函数，即将其表示成偶函数和奇函数之和。如定义函数$f_{even}(t)$和$f_{odd}(t)$为

$$\left.\begin{aligned}f_{even}(t)&=\frac{f(t)+f(-t)}{2}\\f_{odd}(t)&=\frac{f(t)-f(-t)}{2}\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

很明显有$f_{even}(-t)=f_{even}(t)$，$f_{odd}(-t)=-f_{odd}(t)$，$f(t)=f_{even}(t)+f_{odd}(t)$。

前面已多次说过，当时间t取负值时函数值为0，即

$$f(t)=0 \quad t<0 \tag{c}$$

这种函数称为因果性时间函数。当 t 取正值时，由式(c)

$$f(-t)=0 \quad t>0$$

所以，由式(b)可得

$$f(t)=2f_{even}(t)=2f_{odd}(t) \quad t>0$$

同时，由式(3.134)可得

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathscr{R}[F(\omega)]\cos\omega t\,d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathscr{I}[F(\omega)]\sin\omega t\,d\omega \quad t>0 \tag{3.135}$$

上式表示：因果性时间函数可以单独用其富里哀变换 $F(\omega)$ 的实部 $\mathscr{R}[F(\omega)]$ 或虚部 $\mathscr{I}[F(\omega)]$ 表示，但其实部和虚部不是分别独立的，它们必须满足上式所表示的关系。

进一步可以证明，这时的 $\mathscr{R}[F(\omega)]$ 和 $\mathscr{I}[F(\omega)]$ 构成式(3.40) 所示的希尔伯特变换对。在振动理论中经常要研究因果性时间函数，但在实用上几乎不用担心式(3.135)的关系。因此本书对这个问题不作更多的论述。

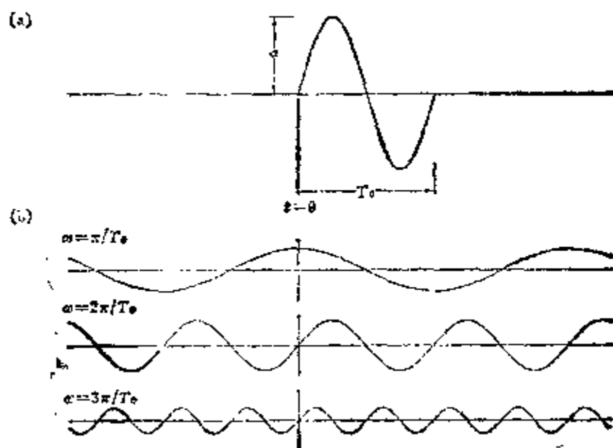


图3.31 因果性函数的谐和振动分量

【例题3.4】 对图3.31(a)所示由一个波长的正弦波组成的因果性时间函数作富里哀变换。

〔解〕 图示函数可以表示成

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ a\sin(2\pi t/T_0) & 0\leqslant t\leqslant T_0\\ 0 & T_0<t\end{cases}$$

因为是实函数，由式(3.130)可得

$$\begin{aligned}\mathscr{R}[F(\omega)]&=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt\\&=a\int_0^{T_0}\sin(2\pi t/T_0)\cos\omega t\,dt\\&=\frac{a}{2}\int_0^{T_0}\{\sin[(2\pi/T_0)+\omega]t+\sin[(2\pi/T_0)-\omega]t\}dt\\&=-\frac{a}{2}\left\{\frac{\cos[(2\pi/T_0)+\omega]t}{(2\pi/T_0)+\omega}+\frac{\cos[(2\pi/T_0)-\omega]t}{(2\pi/T_0)-\omega}\right\}_0^{T_0}\\&=\frac{2\pi aT_0}{4\pi^2-(\omega T_0)^2}(1-\cos\omega T_0)\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}\mathscr{I}[F(\omega)]&=-a\int_0^{T_0}\sin(2\pi t/T_0)\sin\omega t\,dt\\&=\frac{2\pi aT_0}{4\pi^2-(\omega T_0)^2}\sin\omega T_0\end{aligned}$$

进而由式(3.119)和(3.120)可得

$$|F(\omega)|=\frac{2\pi aT_0}{4\pi^2-(\omega T_0)^2}\sqrt{(1-\cos\omega T_0)^2+\sin^2(\omega T_0)}=\frac{aT_0}{\pi}\left|\frac{\sin(\omega T_0/2)}{1-(\omega T/2\pi)^2}\right|$$

$$\phi(\omega)=\arctan\frac{\sin\omega T_0}{1-\cos\omega T_0}=\arctan[\cot(\omega T_0/2)]=\frac{1}{2}(\pi-\omega T_0)$$

所以，由式(3.133)，所给定的函数成

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty|F(\omega)|\cos[\omega t+\phi(\omega)]d\omega$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty|F(\omega)|\sin[\omega(t-T_0/2)]d\omega$$

由此可知，此函数可分解成振幅为$-|F(\omega)|/\pi$的谐和振动分量，即可表示成这些谐和分量的积分和。

图3.31(b)画出了谐和振动分量中对应圆频率$\omega=\pi/T_0$，$2\pi/T_0$和$3\pi/T_0$的分量。应该注意的是，图(a)中原函数$f(t)$是因果性时间函数，$t<0$时为0，而其分量则为在$-\infty<t<\infty$内的周期函数，如图(b)所示。也就是说，当给定的函数$f(t)$在$t<0$时为0时，则由谐和振动分量的积分和在$t<0$范围内应始终为0，其各分量的振幅和相位可由此来确定。

3.6.9 富里哀变换的图示法—富里哀谱

如前所述，时间函数$f(t)$的富里哀变换$F(\omega)$是圆频率ω的复函数。如式(3.117)、(3.119)和(3.120)所示，若将$F(\omega)$的实部和虚部分开，表示成$F(\omega)=\mathscr{R}[F(\omega)]+i\mathscr{I}[F(\omega)]$，则富里哀振幅$|F(\omega)|$和相位角$\phi(\omega)$分别由下式给出

$$|F(\omega)|=\sqrt{(\mathscr{R}[F(\omega)])^2+(\mathscr{I}[F(\omega)])^2}$$

$$\phi(\omega)=\arctan\frac{\mathscr{I}[F(\omega)]}{\mathscr{R}[F(\omega)]}$$

$f(t)$为实函数时，$\mathscr{R}[F(\omega)]$和$\mathscr{I}[F(\omega)]$分别为ω的偶函数和奇函数。所以，$|F(\omega)|$为偶函数，而$\phi(\omega)$为奇函数。

用图形来表示复函数$F(\omega)$的方法，有如下几种。

a. 富里哀谱法

富里哀振幅$|F(\omega)|$和富里哀相位角$\phi(\omega)$随圆频率ω变化的图形分别称为富里哀振幅谱和富里哀相位谱，总称为富里哀谱。一般所谓谱是指将具有复杂组成的量分解成单纯的分量，再将其按所具有的某个特征量的大小顺序排列起来。在这里就是将给定的任意非谐和时间函数分解成各谐和振动分量，再按各谐和振动分量的圆频率大小画出各分量的振幅和相位角。在实用上，所研究的时间函数都限于实函数。如上所述，这时$|F(\omega)|$为偶函数，而$\phi(\omega)$为奇函数。所以通常都省略ω为负的部分，而只画出ω的正轴部分。

根据具体情况不同，还可将横轴取为ω的对数，将纵轴取为复函数绝对值$|F(\omega)|$的对数刻度或相位角$\phi(\omega)$的算术刻度。这种图称为波特图。

b. RI谱

用来表示富里哀变换的实部$\mathscr{R}[F(\omega)]$和虚部$\mathscr{I}[(F)]$随圆频率ω变化的图，称为RI谱，虽然这并不是通常所使用的名称。我们已经知道，$\mathscr{R}[F(\omega)]$是ω的偶函数，$\mathscr{I}[F(\omega)]$是ω的奇函数，所以对负的ω值同样不画。

c. 相平面图

也可用实轴表示实部$\mathscr{R}[F(\omega)]$的值，虚轴表示虚部$\mathscr{I}[F(\omega)]$的值，将函数$F(\omega)$表示成复平面上的曲线。这种图相当于图2.12表示一般复数时的阿甘特图，这里把它叫做相平面图。将$\mathscr{R}[F(\omega)]$和$\mathscr{I}[F(\omega)]$看作独立变量，从$\mathscr{R}[F(\omega)]$和$\mathscr{I}[F(\omega)]$的表示式中消去圆频率，得出方程式$S(\mathscr{R}[F(\omega)], \mathscr{I}[F(\omega)])=0$，由这个方程式所确定的平面曲线就是相平面图上所画出的曲线。曲线上的各点由$\mathscr{R}[F(\omega)]+i\mathscr{I}[F(\omega)]$表示，所以连结原点和曲线上一点的直线是表示复函数$F(\omega)$即各谐和振动分量的矢量。直线的长度表示各频率分量的振幅$|F(\omega)|$，直线与实轴所成的夹角表示相位角$\phi(\omega)$。相平面上的曲线就是这种矢量的端点轨迹。相平面图上通常也画出负ω值时的曲线。但只要考虑到$\mathscr{R}[F(\omega)]$是ω的偶函数，$\mathscr{I}[F(\omega)]$是ω的奇函数，就可知道ω分别为正值和负值时的曲线是关于实轴对称的曲线。

【例题3.5】 图3.32(a)所表示的因果性时间函数为

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-t} & 0\leqslant t\end{cases}$$

用图表示它的富里哀变换。

〔解〕根据式(3.115)，给定的函数$f(t)$的富里哀变换为

$$F(\omega)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-i\omega t}dt=-\frac{1}{1+i\omega}\left[(e^{-(1+i\omega)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{1+i\omega}$$

所以

$$\mathscr{R}[F(\omega)]=1/(1+\omega^2),\ \mathscr{I}[F(\omega)]=-\omega/(1+\omega^2)$$

$$|F(\omega)|=1/\sqrt{1+\omega^2},\ \phi(\omega)=-\arctan\omega$$

对不同的ω画出$|F(\omega)|$和$\phi(\omega)$，即富里哀振幅谱和富里哀相位谱，如图3.32(b)所示。图3.32(c)为RI谱，即$\mathscr{R}[F(\omega)]$和$\mathscr{I}[F(\omega)]$与ω的关系图。

从上面表示$\mathscr{R}[F(\omega)]$和$\mathscr{I}[F(\omega)]$的两个式子中消去ω，就得$(\mathscr{R}[F(\omega)])^2+(\mathscr{I}[F(\omega)])^2=\mathscr{R}[F(\omega)]$，即

$$\left(\mathscr{R}[F(\omega)]-\frac{1}{2}\right)^2+(\mathscr{I}[F(\omega)])^2=\frac{1}{4}$$

这就是确定图3.32(d)上相平面图曲线的方程。很明显，对坐标轴$\mathscr{R}[F(\omega)]$和$\mathscr{I}[F(\omega)]$而言，该方程式表示圆心为$\mathscr{R}[F(\omega)]=1/2$，半径为1/2的圆。图中曲线的实线部分对应正的$\omega$值，虚线部分对应负的$\omega$值。

【例题3.6】 设图3.31 所表示的函数中$a=1.0$，$T_0=1\text{s}$，试用图3.32的方法表示其富里哀变换。

〔解〕这时的富里哀变换已在例题3.4中求出，采用与例题3.5相同的图示方法，其结果如图3.33所示。

上述三种图示法中，以富里哀谱表示法最为常用。但实用上往往将横轴取为频率ν $(=\omega/2\pi$，单位为Hz)，而不是圆频率ω(单位为rad/s)。另外，有时也将横轴取为谐和振动分量的周期T $(=1/\nu$，单位为s)的对数坐标。图3.34和图3.35分别为以频率和周期为横坐标的埃尔森特罗1940地震动南北分量的富里哀振幅谱。另外，作为参考求出了图3.5(a)所示加速度反应时程的富里哀振幅谱，结果如图3.36所示。

富里哀谱表征给定时程的谐和振动分量的信息，即所谓频率特性。时程与富里哀谱是互

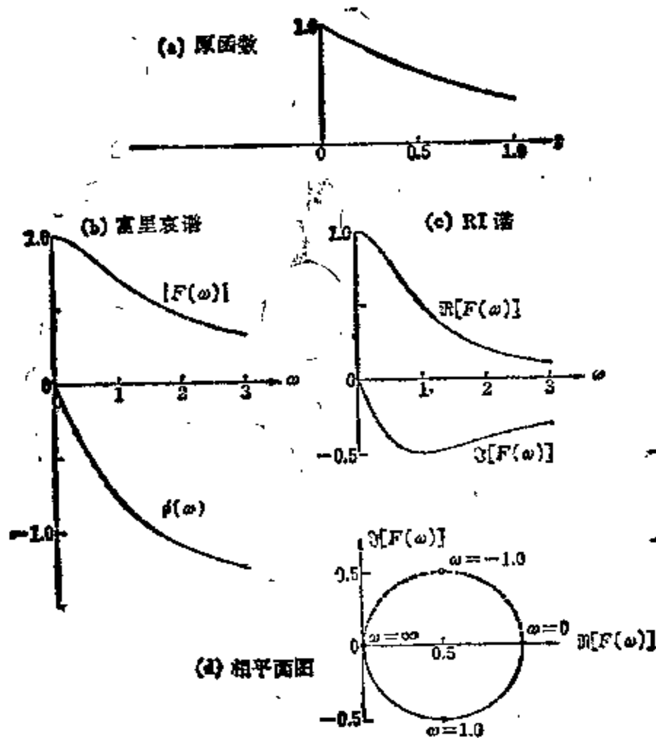


图3.32 富里哀变换的图示实例

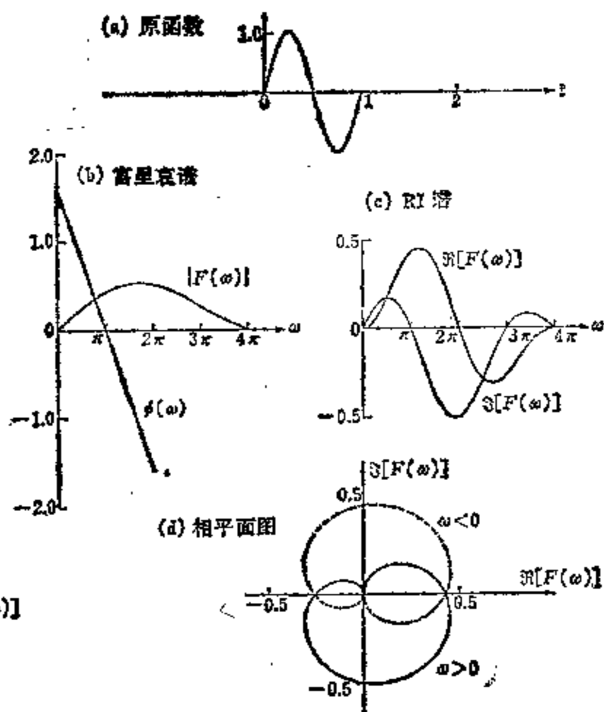


图3.33 富里哀变换的图示实例

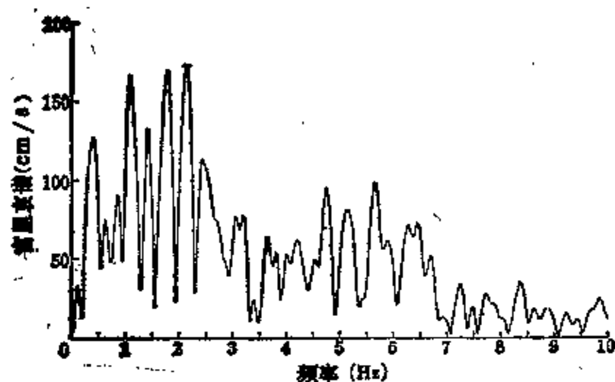


图3.34 埃尔森特罗1940南北分量地震动的富里哀振幅谱(以频率表示)

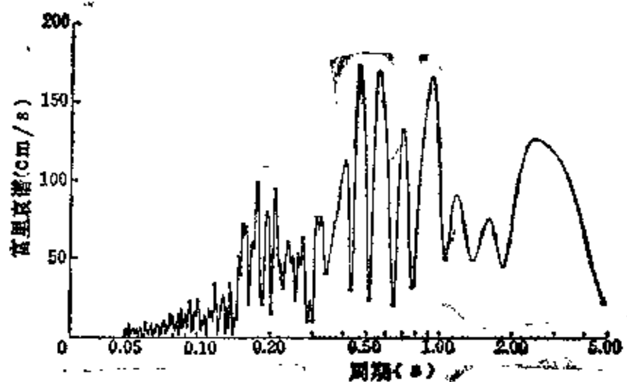


图3.35 埃尔森特罗1940南北分量地震动的富里哀振幅谱(以周期表示)

相用富里哀变换和富哀里逆变换的关系连结起来的。给定了时程，就确定了富里哀谱。反之，知道了富里哀谱，就可以完全重现时程。即两者所包含的信息量是完全相同的。

但实际上，在时程所包含的频率特性中，对振幅特性重视的倾向比相位特性强，富里哀振幅谱用得很多，而富里哀相位谱往往很少用。产生这种倾向的原因是，在抗震研究上，认为各个分量波的振幅大小比其相位更为重要。但是，从上面所述的意义来看，仅仅考虑富里哀振幅谱所提供的信息是不充分的。这一点有必要加以注意。

设以函数$f(t)$表示的振动的持续时间为T_0。则因为$T_0 < t$时$f(t)=0$，所以，富里哀变换也可表示成

$$F(\omega)=\int_0^{T_0} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{3.136}$$

进一步，如设积分上限为任意时间 t ($\leqq T_0$)，便得

$$F(\omega,\ t)=\int_0^t f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{3.137}$$

$F(\omega,\ t)$是表示$f(t)$在 $t=0-t$ 时间段内的频率特性的谱，画出 t 在 $0\leqslant t\leqslant T_0$范围内依次变化时的谱，就可得到频率特性随时间的变化。式(3.137)中的函数 $F(\omega,\ t)$ 或其谱图称为随时间变化的富里哀谱，或简称为随时间变化的谱。

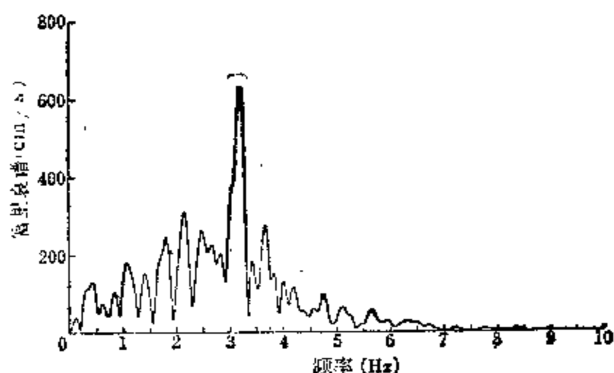


图3.36　加速度反应时程的富里哀振幅谱

图3.37是1964年新潟地震时得到的加速度记录。在大约 $t=10$s以后，由于地基发生液化，振动状态大大改变。这个记录随时间变化的谱如图3.38所示。

3.6.10　对非谐和非周期激振的反应

单质点阻尼系统受任意输入$f(t)$作用时的运动方程如式(3.108)所示，可表示为

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=f(t) \tag{3.138}$$

现设$f(t)$为非谐和非周期性的、且为从 $t=0$ 开始作用的因果性时间函数，则显然到 $t=0$ 时刻为止系统处于静止状态，所以系统反应$x(t)$的初始条件为 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$。

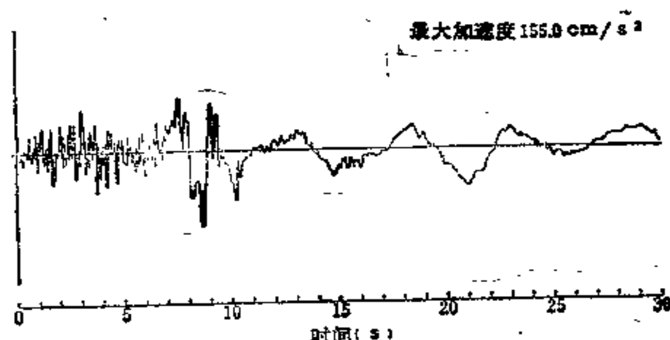


图3.37　新潟地震的强震记录

对式(3.138)作富里哀变换，便得

$$\int_0^\infty \ddot{x}(t)e^{-i\omega t}dt+2h\bar{\omega}\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-i\omega t}dt+\bar{\omega}^2\int_0^\infty x(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt$$

设$x(t)$和$f(t)$的富里哀变换分别为$X(\omega)$和$F(\omega)$，即$x(t)\rightarrow X(\omega)$，$f(t)\rightarrow F(\omega)$。根据初始条件和式(3.127)和式(3.126)，有 $\ddot{x}(t)\rightarrow -\omega^2X(\omega)$，$\dot{x}(t)\rightarrow i\omega X(\omega)$，所以，由上式可得

$$-\omega^2X(\omega)+2ih\bar{\omega}\omega X(\omega)+\bar{\omega}^2X(\omega)=F(\omega)$$

即

$$X(\omega)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}F(\omega)$$

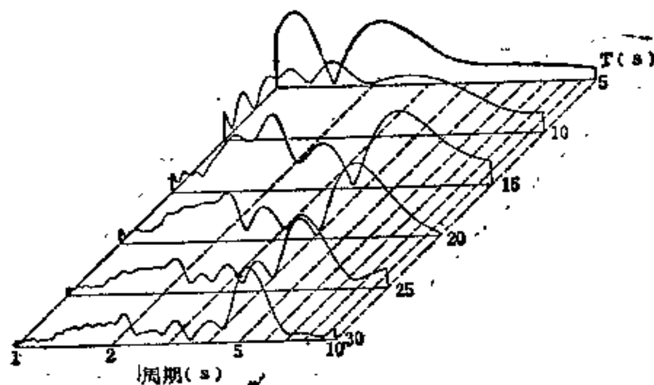


图3.38　随时间变化的谱

等号右边的复函数 $1/(\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega)$

是由式(2.96)或式(3.73)得到的系统的频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega} \tag{3.139}$$

因此，上面的式子可写成

$$X(\omega)=H(\omega)F(\omega) \tag{3.140}$$

也就是说，系统反应的富里哀变换可表示成输入的富里哀变换与频率响应函数之积。对式(3.140)作富里哀逆变换，就可求出反应的时程

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

用模式来表示上面的分析过程，如图3.39(a)所示。

其次，再考虑当系统的输出为已知，即反应的时程已测定的情况。这时，与上述顺序相反进行，即按图3.39(b)的顺序进行，就可求出输入$f(t)$。即,先求出$x(t)$的富里哀逆变换$X(\omega)$，由式(3.140)有$F(\omega)=X(\omega)/H(\omega)$，所以对其求富里哀逆变换即可得到输入$f(t)$：

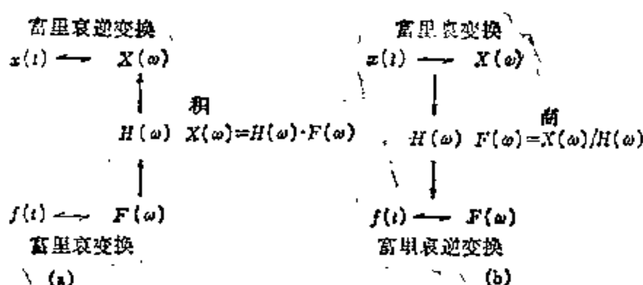


图3.39 频率分析过程

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)/H(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

在§2.4.1中已说过，受谐和激振时系统运动方程式的通解由余函数和特解组成。也就是说，系统反应由暂态振动和稳态振动组成，假定前者很快就衰减掉，而只考虑后者的稳态振动解，就可得出§2.5.3中的频率响应函数。另外，在§3.5.3e中，用拉普拉斯变换求频率响应函数时，也只考虑稳态振动而忽略暂态振动部分。这样可见，频率响应函数仅与稳态振动有关，而与由初始条件决定的暂态振动无关。

如系统反应从$t=0$时刻开始，则即使初始条件为$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$，系统反应中也应包含暂态振动。然而，在上述富里哀变换解法中，只用了与稳态振动有关的频率响应函数，并不出现与暂态振动有关的部分。乍一看来，这很奇怪。但只要看一下图3.31的例子就可以明白，即使是因果性函数，作富里哀变换时也是分解成$-\infty<t<\infty$范围内的分量，只要考虑到这些谐和振动分量并无特定的开始时刻，就很容易理解上述情况并没有什么不合理之处。也就是说，暂态振动也可表示成频率各不相同的无限多稳态振动之和。

3.6.11 频率响应函数与脉冲反应函数的关系

在3.1节中，将脉冲反应函数$\xi(t)$定义为表示系统对单位脉冲的反应的因果性时间函数，在这里则以$h(t)$来表示。在3.2节中，反应$x(t)$被表示为输入$f(t)$与脉冲反应函数$h(t)$之褶积，即

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{3.141}$$

或记成

$$x(t)=f(t)*h(t) \tag{3.142}$$

脉冲反应函数是更一般地将式(3.141)看作为关于$h(t)$的积分方程式的解，即是由反褶积$h(t)=x(t)\,/\!/\,f(t)$定义的。另外，在3.5.3d节中，以δ函数表示单位脉冲的冲击力，由对系统运动方程式求拉普拉斯变换来确定脉冲反应函数。

设输入$f(t)$和反应$x(t)$的富里哀变换分别为$F(\omega)$和$X(\omega)$，对式(3.141)的两边作富里变换，就得

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)e^{-i\omega t}dt\right]d\tau$$

作变量变换$t-\tau=\tau'$，则得

$$x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau')e^{-i\omega\tau'}d\tau'$$

即

$$X(\omega)=F(\omega)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt$$

将上式与式(3.140)作比较，便有

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt=H(\omega)$$

由此可见，脉冲反应函数与频率响应函数构成富里哀变换对关系，即

$$h(t)\leftrightarrow H(\omega) \tag{3.143}$$

这个关系已经可由式(3.67)关于褶积的拉普拉斯变换法则，以及由此而得出的式(3.129)来求得。实际上，如果对式(3.5)所示的脉冲反应函数*，即

$$\left.\begin{aligned}h(t)&=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}}e^{-h\bar{\omega}t}\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t \quad & 0\leqslant t\\ h(t)&=0 & t<0\end{aligned}\right\}$$

作富里哀变换，则由简单的分部积分可得：

$$\frac{1}{\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}}\int_0^{\infty}e^{-(h\bar{\omega}+i\omega)t}\sin\sqrt{1-h^2}\,\bar{\omega}t\,dt=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}$$

这就得到了式(2.96)所示的频率响应函数。

这种富里哀变换关系不仅在式(3.5)与式(2.96)之间成立，而且在分别与其对应的脉冲反应函数与频率响应函数之间也都成立。例如，式(3.24)中的第3式为给定地面运动加速度时绝对加速度反应的脉冲反应函数，如对其求富里哀变换，则很容易证明，可以得到式(2.108)所示的绝对加速度/地面运动加速度的频率响应函数。现设系统的$T=0.3$s，$h=0.05$，则这两个函数的图形如图3.40所示。

如果给定了输入$f(t)$，则由式(3.142)可知，反应$x(t)$便可由$f(t)$与脉冲反应函数$h(t)$之褶积确定。如果已知系统的反应，则输入可由如下反褶积求出

$$f(t)=x(t)\,/\!/\,h(t) \tag{3.144}$$

图3.41是这种时程分析的顺序与式(3.143)所示富里哀变换关系的图式表示。

将图3.41与表示频率分析顺序的图3.39合起来，就得到图3.42所示的反应分析的体系图。但图上分别用$g(t)$和$G(\omega)$来表示反应$x(t)$及其富里哀变换$X(\omega)$。左半部的虚线内是时域，在时域内进行的分析是时程分析。右半部的虚线内是频域，在频域内进行的分析是频

* 注意，这里的函数名$h(t)$与阻尼比h相同，不要混淆。另外，该式中质量已改为单位质量，即$m=1$。

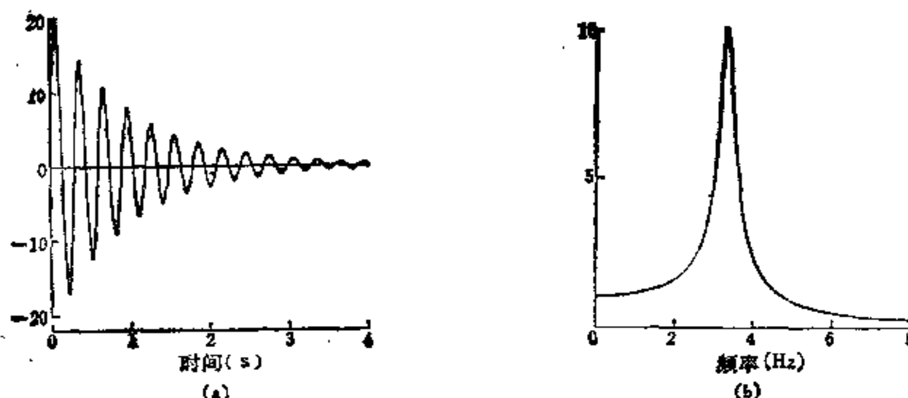


图3.40 (a)脉冲反应函数与(b)频率响应函数

率分析。而且，这两个领域互相由富里哀变换和富里哀逆变换的关系连结起来，如图所示。

这里对输入与反应的关系引入了图3.42所示的体系图。但是，这个图所表达的概念可以进一步推广，它对属于系统的两个完全任意的振动量之间也成立。

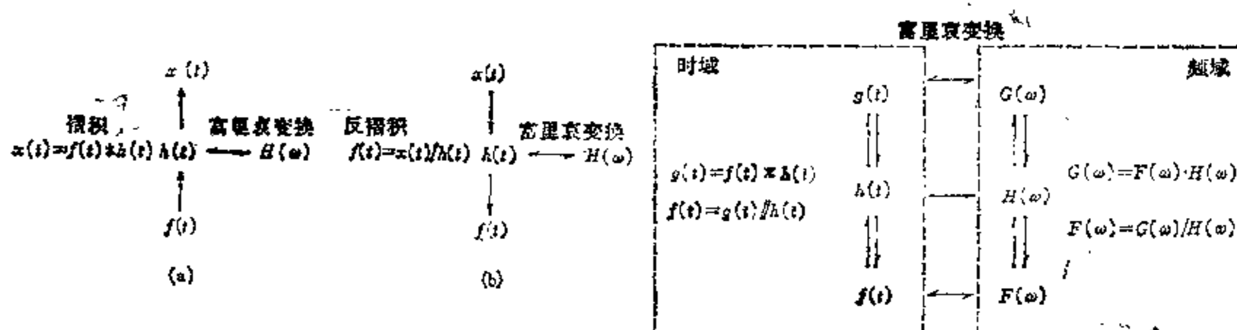


图3.41 时程分析的顺序　　　　图3.42 反应分析的体系图

3.6.12 对地面运动的反应

设地面运动位移为$y(t)$，则地面运动的速度和加速度分别由$\dot{y}(t)$，$\ddot{y}(t)$给出。现再设$y(t)$的富里哀变换为$Y(\omega)$，同时，把$\dot{y}(t)$和$\ddot{y}(t)$的富里哀变换分别记为$\dot{Y}(\omega)$,$\ddot{Y}(\omega)$，则有

$$\left.\begin{aligned} y(t) &\to Y(\omega) \\ \dot{y}(t) &\to \dot{Y}(\omega) \\ \ddot{y}(t) &\to \ddot{Y}(\omega) \end{aligned}\right\}$$

如果地面运动从静止状态开始，则由式(3.126)和式(3.127)，有

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y}(\omega) &= \mathrm{i}\omega Y(\omega) \\ \ddot{Y}(\omega) &= -\omega^2 Y(\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

地面运动加速度$\ddot{y}(t)$给定时，系统的运动方程式如式(2.100)所示，即

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2 x=-\ddot{y}(t)$$

这也就是在式(3.138)中取$f(t)=-\ddot{y}(t)$的情况。因此，由式(3.140)和式(a)，位移反应的富里哀变换可由下列式子中的任意一个表示

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)=\begin{cases}[-H(\omega)]\ddot{Y}(\omega)\\ [-\mathrm{i}\omega H(\omega)]\dot{Y}(\omega)\\ [\omega^2 H(\omega)]Y(\omega)\end{cases} \tag{b}$$

式中$H(\omega)$为式(3.139)所示频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2\mathrm{i}h\bar{\omega}\omega}$$

速度反应$\dot{x}(t)$和加速度反应$\ddot{x}(t)$的富里哀变换分别记为$\dot{X}(\omega)$，$\ddot{X}(\omega)$，设反应的初始值为$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$，则由式(3.126)和(3.127)，有

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow \dot{X}(\omega)=\begin{cases}[-\mathrm{i}\omega H(\omega)]\ddot{Y}(\omega)\\ [\omega^2 H(\omega)]\dot{Y}(\omega)\\ [\mathrm{i}\omega^3 H(\omega)]Y(\omega)\end{cases} \tag{c}$$

$$\ddot{x}(t) \leftrightarrow \ddot{X}(\omega)=\begin{cases}[\omega^2 H(\omega)]\ddot{Y}(\omega)\\ [\mathrm{i}\omega^3 H(\omega)]\dot{Y}(\omega)\\ [-\omega^4 H(\omega)]Y(\omega)\end{cases} \tag{d}$$

参照式(a)就可知道，绝对加速度反应可以表示成

$$\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t) \leftrightarrow \ddot{X}(\omega)+\ddot{Y}(\omega)=\begin{cases}[\omega^2 H(\omega)+1]\ddot{Y}(\omega)\\ [\mathrm{i}\omega\{\omega^2 H(\omega)+1\}]\dot{Y}(\omega)\\ [-\omega^2\{\omega^2 H(\omega)+1\}]Y(\omega)\end{cases} \tag{e}$$

更一般地如果设地面运动的富里哀变换为$F(\omega)$，反应的富里哀变换为$G(\omega)$，式(b)、(c)、(e)的[ ]内记为$\hat{H}(\omega)$，则上面的式子完全可以用如下形式表示

$$G(\omega)=\hat{H}(\omega)\cdot F(\omega) \tag{3.145}$$

面$\hat{H}(\omega)$分别与表3.3中所列出的频率响应函数相等。当给定任意的地面运动时，先计算其富里哀变换$F(\omega)$，再分别用相应的$\hat{H}(\omega)$求积$G(\omega)$，然后求其富里哀逆变换，就可求得任意的反应。

下面举个例子，设输入为埃尔森特罗1940南北地震动分量的加速度时程，求系统的绝对加速度反应。如设系统的固有周期为$T=0.3$s，阻尼常数为$h=0.05$，综合前面的图3.4、图3.34、图3.40(a)、图3.40(b)、图3.5(a)和图3.36，画出图3.42体系图的图形，则如图3.43所示。但为了方便起见，在图中对复函数只在频域中画出了振幅谱，未画相位谱。

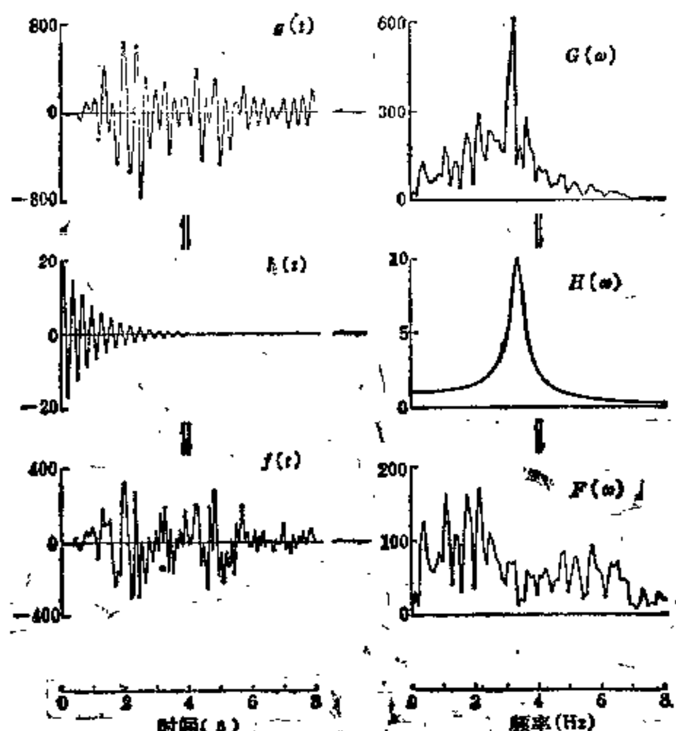


图3.43 反逆分析体系图实例

另外，当输入地面运动给定为加速度时，脉冲反应函数由式(3.24)表示，当输入给定为速度或位移时，就难以在时

域内直接求解脉冲反应函数。但是，必要时可以对表3.3的第 2 行和第 3 行所示的频率响应函数作富里哀逆变换，间接地求出此时的脉冲反应函数。

3.6.13 富里哀谱与反应谱的关系

本节要论述富里哀谱与反应谱的关系。由式(3.136)，持续时间为T_0的地面运动加速度$\ddot{y}(t)$的富里哀变换可表示成

$$F(\omega)=\int_0^{T_0} \ddot{y}(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (a)$$

其富里哀振幅谱为

$$|F(\omega)|=\left|\int_0^{T_0} \ddot{y}(t)e^{-i\omega t}dt\right| \qquad (3.146)$$

另一方面，无阻尼的单质点系统受地面运动加速度$\ddot{y}(t)$作用时，其速度反应就是式(3.20)中取阻尼常数$h=0$和$\bar{\omega}_d=\bar{\omega}$时的结果。在这里只是把系统的固有圆频率也作为一个变量，写成ω以代替$\bar{\omega}$。同时，因为振幅的正负并不太重要，所以，如果去掉负号，就得

$$\dot{x}(t)=\int_0^t \ddot{y}(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

上式也可写成

$$\dot{x}(t)=\mathscr{R}\left[e^{i\omega t}\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right] \qquad (b)$$

如式(3.137)所示，上式中的积分是地面运动加速度$\ddot{y}(t)$随时间变化的富里哀谱，即

$$F(\omega, t)=\int_0^t \ddot{y}(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (3.147)$$

参照式(3.118)，以振幅和相位角来表示

$$F(\omega, t)=|F(\omega, t)|e^{i\phi(\omega,t)}$$

式中

$$\phi(\omega, t)=\arctan\frac{\mathscr{I}[F(\omega, t)]}{\mathscr{R}[F(\omega, t)]}$$

代入式(b)，便得无阻尼单质点系统的速度反应与地面运动加速度随时间变化的富里哀谱之间的关系式为

$$\dot{x}(t)=|F(\omega, t)|\cos[\omega t+\phi(\omega, t)] \qquad (3.148)$$

由式(3.148)可得速度反应谱为

$$S_v(0, \omega)=|\dot{x}(t)|_{max}=\big||F(\omega, t)|\cos[\omega t+\phi(\omega, t)]\big|_{max}$$

上式与式(3.146)所示地面运动加速度的富里哀谱$|F(\omega)|$孰大孰小不能一概而论。但是，如图3.44埃尔森特罗1940南北分量和塔夫特1952东西分量地震动等例子所表明的那样，对实际地震动两者是近似一致的，一般情况下富里哀谱略为小一些。实用中经常利用这种近似关系。例如，在按预先给定的反应谱人工合成模拟地震动时，常常利用这种关系。

式(3.147)随时间变化的谱在$t=T_0$时与式(a)所表示的富里哀谱一致，即$F(\omega, T_0)=F(\omega)$，其后当$T_0\leqslant t$时仍保持此值。因此，式(3.148)变成

$$\dot{x}(t)=|F(\omega)|\cos[\omega t+\phi(\omega)] \quad T_0\leqslant t \qquad (c)$$

表示一种简谐振动。

当地震动结束后，系统仍继续振动。这种地震动结束后残留的振动称为残留振动，残留振

动的反应谱称为残留谱。地震动结束后，地面自然就不再受到外部干扰，所以残留振动是自由振动，式(c)便表示这种自由振动的速度时程。

由式(c)，残留振动的速度反应谱为

$$S_v(0,\ \omega)_{残留}=|\dot{x}(t)|_{max}=|F(\omega)|\quad T_0\leqslant t$$

也就是说，无阻尼单自由度系统对地面运动加速度的残留速度谱与地面运动加速度的富里哀振幅谱相等。

3.6.14 离散富里哀分析

前面都是将时程作为时间 t 的连续函数 $f(t)$ 处理的，因此其富里哀变换 $F(\omega)$ 也是圆频率 ω 的连续函数。但在动力分析中，实际上时程通常是以每隔一定时间间隔的取值，即作为离散值给出的。这种每隔一定时间间隔读取连续量，并以离散量的数列来表示原来连续量的方法，通常称为数字化。

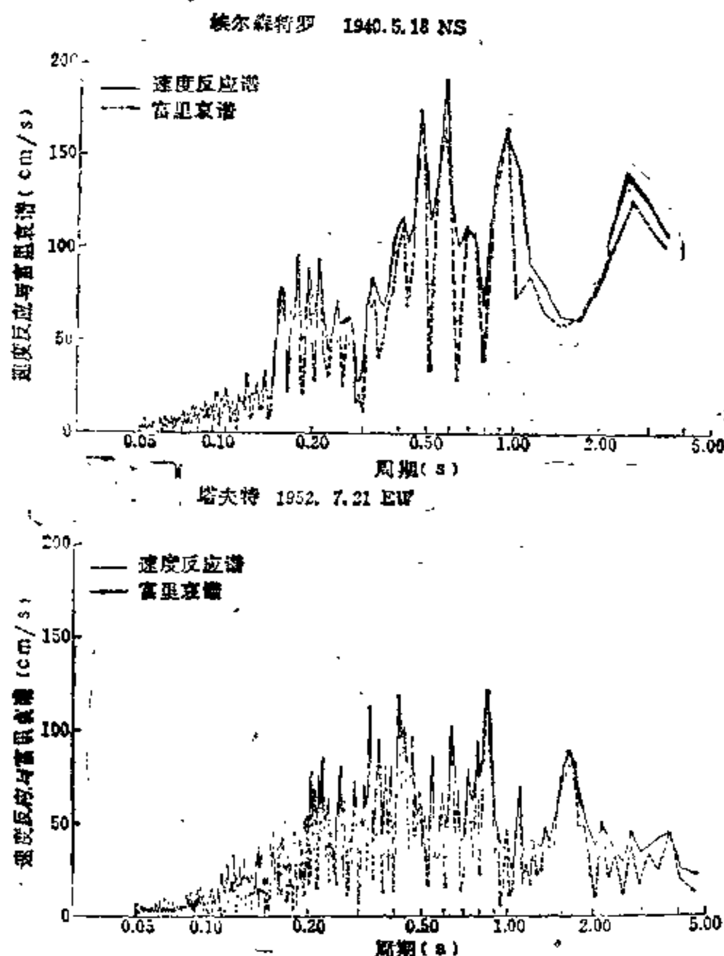


图3.44 速度反应谱(无阻尼)与富里哀振幅谱

图3.45表示每隔时间间隔 Δt 读取连续量时程 $f(t)$，并将它用 N 个离散值 $x_m(m=0,1,2\cdots N-1)$ 来表示，就有

$$x_m=f(m\Delta t)\qquad\text{(a)}$$

而这个时程的持续时间为

$$T=N\Delta t\qquad\text{(b)}$$

这种离散值 x_m 称为原连续量 $f(t)$ 的样本值，或简称为原连续量的数据。

a. 有限富里哀近似

现设数据个数 N 为偶数，与式(3.97)相同 x_m 用如下有限三角函数表示：

$$x_m=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}\left(A_k\cos\frac{2\pi km}{N}+B_k\sin\frac{2\pi km}{N}\right)+\frac{A_{N/2}}{2}\cos\frac{2\pi(N/2)m}{N}$$

$$m=0,\ 1,\ 2\cdots N-1\qquad(3.149)$$

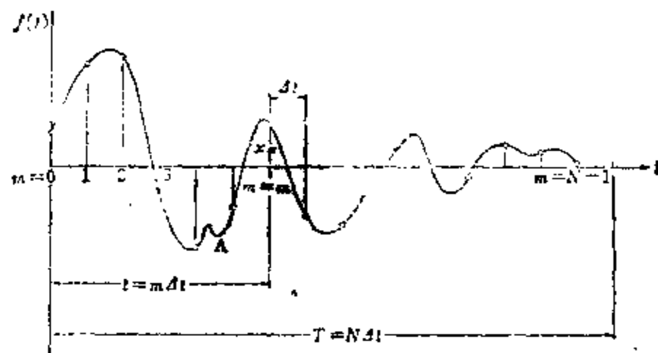


图3.45 时间过程的数字化

式中有总共N个常数：

$$\left.\begin{matrix} A_0, & A_1, & A_2\cdots A_{N/2-1}, & A_{N/2} \\ B_1, & B_2\cdots B_{N/2-1} & & \end{matrix}\right\}$$

因为已给定N个x_m值，所以这些常数全部可以确定。与式(3.98)相对应，有

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cos\frac{2\pi km}{N} \quad k=0, 1, 2\cdots N/2-1, N/2 \\ B_k &= \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m \sin\frac{2\pi km}{N} \quad k=1, 2\cdots N/2-1 \end{aligned}\right\} \tag{3.150}$$

在推导式(3.150)时，可以利用如下关系式：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi km}{N}\cos\frac{2\pi lm}{N}=\begin{cases} N/2 & k=l \\ 0 & k\neq l \end{cases} \\ &\sum_{m=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi km}{N}\sin\frac{2\pi lm}{N}=\begin{cases} N/2 & k=l \\ 0 & k\neq l \end{cases} \\ &\sum_{m=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi km}{N}\sin\frac{2\pi lm}{N}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.151}$$

式(3.151)与式(3.95)相对应，当k和l均为整数离散值时上式成立，这一性质称为三角函数的选点正交性。

在式(3.150)中设$k=0$，则成

$$\frac{A_0}{2}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m$$

由此可知，式(3.149)的第一项表示全部数据的平均值。

如图3.45所示，$t=m\Delta t$，所以$m=t/\Delta t$，代入式(3.149)，得时间函数

$$\overline{f}(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}\left(A_k\cos\frac{2\pi kt}{N\Delta t}+B_k\sin\frac{2\pi kt}{N\Delta t}\right)+\frac{A_{N/2}}{2}\cos\frac{2\pi(N/2)t}{N\Delta t} \tag{3.152}$$

很明显，这个函数通过所有的离散值点，即图3.45中符号"。"表示的点，并如式(a)所示，在这些点上，该函数与原函数$f(t)$一致。但是，在这些点之间是否与原函数相同是不能保证的。在这一意义上，式(3.152)是一种近似函数，称为原函数$f(t)$的有限富里哀近似。另外，与式(3.98)的情况相同，式(3.150)中的A_k，B_k称为有限富里哀系数。

b. 振动分量

设式(3.152)中$\omega_k=2\pi k/(N\Delta t)$，则

$$\overline{f}(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t)+\frac{A_{N/2}}{2}\cos\omega_{N/2}t \tag{c}$$

再设

$$\nu_k=\omega_k/2\pi=k/(N\Delta t) \tag{3.153}$$

则可进一步表示成

$$\overline{f}(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}(A_k\cos 2\pi\nu_k t+B_k\sin 2\pi\nu_k t)+\frac{A_{N/2}}{2}\cos 2\pi\nu_{N/2}t \tag{3.154}$$

如前面所述，式(c)或式(3.154)的右边第一项为全部数据的平均值，表示图3.45中整个波形对时间轴的偏移，而不是振动分量。因此可以知道，如果去掉这一项，式(c)或式(3.154)就表示将给定的时程曲线分解为有限个($N/2$个)谐和振动分量，即$A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t$或$A_k\cos 2\pi\nu_k t+B_k\sin 2\pi\nu_k t$。与§3.6.4中所述的富里哀级数的情况相同，这些谐和振动分量称为k阶谐和振动分量，或简称为k阶分量、k阶振型等。由式(3.153)可知，$\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_{N/2}$，一阶频率

$$\nu_1=1/(N\Delta t) \tag{3.155}$$

特称为基本频率。另外，$\nu_{k+1}-\nu_k=1/(N\Delta t)$，所以各阶频率为等差离散值，其增量与基本频率相等。

k阶谐和振动分量的周期为

$$T_k=1/\nu_k(\mathrm{s}) \tag{3.156}$$

因此，由式(3.155)，一阶振型的周期为$T_1=1/\nu_1=N\Delta t$。由式(b)可知，这与时程曲线的持续时间相等。同时，这与前面图3.29中$k=1$的情况相同。

由式(3.153)，与$k=N/2$相对应的最高阶频率$\nu_{N/2}$为

$$\nu_{N/2}=1/(2\Delta t) \tag{3.157}$$

对应的周期为$T_{N/2}=1/\nu_{N/2}=2\Delta t$，即相当于时间间隔$\Delta t$的两倍。式(3.154)中不包含比这个振动分量更高阶的分量。所以，$\nu_{N/2}$是可以从原时程曲线上检测到的所含频率成分的极限，即分辨率。在图3.45中，如果不将时间间隔Δt进一步取小，就不可能检测出图中A部分所示的高频分量。这种极限频率$\nu_{N/2}$称为奈奎斯特频率。

在式(3.154)中设

$$X_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2},\ \phi_k=\arctan(-B_k/A_k) \tag{d}$$

即

$$\left.\begin{aligned}A_k&=X_k\cos\phi_k\\ B_k&=-X_k\sin\phi_k\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

则可表示

$$\bar{f}(t)=\frac{X_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}X_k\cos(2\pi\nu_k t+\phi_k)+\frac{X_{N/2}}{2}\cos 2\pi\nu_{N/2}t \tag{3.158}$$

所以，X_k和ϕ_k($k=1, 2\cdots N/2$)分别表示k阶谐和振动分量的振幅和初相位。这与式(3.102)所述的情况相同。

c. 有限复富里哀级数

由式(2.25)，有

$$\cos\frac{2\pi km}{N}=\frac{1}{2}[e^{i(2\pi km/N)}+e^{-i(2\pi km/N)}]$$

$$\sin\frac{2\pi km}{N}=-\frac{1}{2}i[e^{i(2\pi km/N)}-e^{-i(2\pi km/N)}]$$

由式(2.24)的第一式可知，$e^{i(2\pi m)}=1$，所以$e^{-i(2\pi km/N)}=e^{i(2\pi m)}\cdot e^{-i(2\pi km/N)}=e^{i(2\pi(N-k)m/N)}$，因此上式可以写成

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{2\pi km}{N}&=\frac{1}{2}\left[e^{i(2\pi km/N)}+e^{i(2\pi(N-k)m/N)}\right]\\ \sin\frac{2\pi km}{N}&=-\frac{1}{2}i\left[e^{i(2\pi km/N)}-e^{i(2\pi(N-k)m/N)}\right]\end{aligned}\right\}$$

代入式(3.149)，时同，由式(3.150)的第2式可知,$B_0=B_{N/2}=0$，把它们也加进式(3.149)，便得

$$\begin{aligned}x_m=&\frac{A_0-iB_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}\left[\frac{A_k}{2}e^{i(2\pi km/N)}+\frac{A_k}{2}e^{i(2\pi(N-k)m/N)}\right.\\&\left.-\frac{iB_k}{2}e^{i(2\pi km/N)}+\frac{iB_k}{2}e^{i(2\pi(N-k)m/N)}\right]\\&+\frac{A_{N/2}}{2}e^{i(2\pi(N/2)m/N)}-\frac{iB_{N/2}}{2}e^{i(2\pi(N/2)m/N)}\\=&\frac{A_0-iB_0}{2}+\sum_{k=1}^{N/2-1}\left[\frac{A_k-iB_k}{2}e^{i(2\pi km/N)}+\frac{A_k+iB_k}{2}e^{i(2\pi(N-k)m/N)}\right]\\&+\frac{A_{N/2}-iB_{N/2}}{2}e^{i(2\pi(N/2)m/N)}\end{aligned}$$

因此，现在如果与式(3.103)的情况相同，定义如下有限复富里哀系数：

$$\left.\begin{aligned}C_k&=\frac{A_k-iB_k}{2}\qquad 0\leqslant k\leqslant N/2\\ C_{N-k}&=\frac{A_k+iB_k}{2}\qquad 1\leqslant k\leqslant N/2-1\end{aligned}\right\}\tag{3.159}$$

则式(3.149)可用如下有限复富里哀级数表示：

$$x_m=\sum_{k=0}^{N-1}C_ke^{i(2\pi km/N)}\qquad m=0,\ 1,\ 2\cdots N-1\tag{3.160}$$

另外，将式(3.150)代入式(3.159)，则得

$$\begin{aligned}C_k&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m\left(\cos\frac{2\pi km}{N}-i\sin\frac{2\pi km}{N}\right)\qquad 0\leqslant k\leqslant N/2\\ C_{N-k}&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m\left(\cos\frac{2\pi km}{N}+i\sin\frac{2\pi km}{N}\right)\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m\left[\cos\frac{2\pi(N-k)m}{N}-i\sin\frac{2\pi(N-k)m}{N}\right]\\&\qquad\qquad 1\leqslant k\leqslant N/2-1\end{aligned}$$

合并起来可以写成

$$C_k=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m\left(\cos\frac{2\pi km}{N}-i\sin\frac{2\pi km}{N}\right)\qquad k=0,\ 1,\ 2\cdots N-1$$

由式(2.24)的第2式，上式可写成

$$C_k=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m e^{-i(2\pi km/N)} \quad k=0,\ 1,\ 2\cdots N-1 \tag{3.161}$$

式(3.161)和式(3.160)分别与时程曲线为时间的连续函数时的式(3.115)和式(3.114)相对应，并分别称为离散富里哀变换和离散富里哀逆变换。

在一般情况下，离散数据$x_m(m=0,\ 1,\ 2\cdots N-1)$给定为实数值。所以，由式(3.150)可知，有限富里哀系数A_k，B_k也是实数。根据式(3.159)的第一式，有限复富里哀系数之间有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}A_k&=2\mathscr{R}(C_k)\\B_k&=-2\mathscr{I}(C_k)\end{aligned}\right\}\quad k=0,\ 1,\ 2\cdots N/2 \tag{3.162}$$

同时，由式(3.159)的两个式子，有如下共轭关系：

$$C_{N-k}=C_k^* \qquad k=0,\ 1,\ 2\cdots N/2-1 \tag{3.163}$$

反过来说，有限复富里哀系数之间存在这种共轭关系且C_0，$C_{N/2}$为实数，是按式(3.160)作富里哀逆变换得出实数列x_m的充分必要条件。

式(3.163)还可写成$|C_{N-k}|=|C_k|$。所以，如图3.46所示，数列$C_k(k=0,1\cdots N-1)$的绝对值对称于点$k=N/2$，即如果在这个点上折迭，则左右两边重合。在这一意义上，称$k=N/2$的点为折迭点，对应于$k=N/2$的频率$\nu_{N/2}=1/(2\Delta t)$为折迭频率。根据式(3.157)折迭频率与奈奎斯特频率是相同的。另外，如果在考虑频率的负轴时画出式(3.103)的关系，则如图中虚线所示。也就是说，$k=0$也是折迭点，可见对应于$k=-(N/2)+1\cdots-1$的系数值，与正轴上的点$k=(N/2)+1\cdots N-1$上的系数值完全相同。

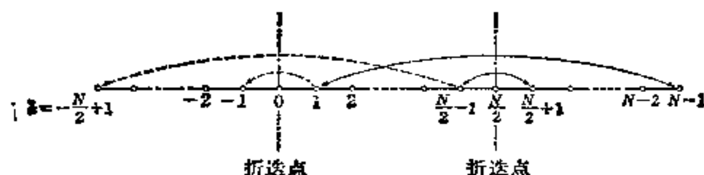


图3.46 复富里哀系数的折迭关系

式(3.149)表示的数列$x_m(m=0,\ 1,\ 2\cdots N-1)$实际上是以有限的数据个数$N$为周期的周期性数列，属于图3.26(b)中所表示的类型。所以，将x_m作为非周期振动的离散数据处理时，必须在实际数据后面添加足够多的零，变成持续时间很长的(c)类型，来近似表示图中的(d)类型。为了这一目的在后面添加的零称为后加零。

d. 富里哀谱

如§3.6.9a中所述，对不同的圆频率ω画出的富里哀振幅$|F(\omega)|$和富里哀相位角$\phi(\omega)$，就得到富里哀振幅谱和富里哀相位谱。如图3.34—3.36所示，当时程给定为连续函数$f(t)$时，这些富里哀谱也是频率的连续函数。

当时程给定为离散值时，将式(3.112)代入式(3.113)，可得有限复富里哀系数与富里哀变换的关系为

$$TC_k=F(\omega)$$

式中 T为时程的持续时间(单位：s)

所以，根据式(3.119)和式(3.120)，富里哀谱可表示成

$$\left.\begin{aligned}|F(\omega)|&=T|C_k|\\ \phi(\omega)&=\arctan\frac{\mathscr{I}(C_k)}{\mathscr{R}(C_k)}\end{aligned}\right\}\tag{3.164}$$

或者，根据式(3.106)，用有限富里哀系数A_k，B_k来表示

$$\left.\begin{aligned}|F(\omega)|&=\frac{T}{2}\sqrt{A_k^2+B_k^2}\\ \phi(\omega)&=\arctan(-B_k/A_k)\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

实用上，富里哀谱是对各阶振型的频率ν_k(单位为Hz)或周期$T_k=1/\nu_k$(单位为s)画出的，也即是作为频率间隔为$\Delta\nu$的不同频率时的离散值画出的。由式(3.153)可知，$\Delta\nu=\Delta\omega/2\pi=1/T=1/(N\Delta t)$。另外，复富里哀系数之间存在式(3.163)所示的折迭关系，所以画图时频率范围取到折迭频率$\nu_{N/2}=1/(2\Delta t)$即可。实际上往往只画到比这个频率更低的、工程上有意义的频率为止。

第四章　两质点系统的振动

本章论述由两个质点组成的系统的振动，例如将二层建筑物模型化后所构成的系统的振动。两质点系统的振动並非只是单质点系统振动的延伸。由于质点数不是单个了，各质点的运动不再互相独立，而有相互耦合的现象产生，使问题复杂化。另一方面，为了处理这种复杂性，有必要引入正则振型、正则坐标等新概念。而且，这些概念在第六章中所讲到的更复杂的多质点系振动分析中也起着不可缺少的作用。因此，本章所述的两质点系的理论主要是为更好理解后面的多质点系振动理论提供必要的基础知识。

4.1　无阻尼自由振动

4.1.1　运动方程式及其解

参照图2.1(b)或(c)中所示单质点系的情况，两质点系统的振动模型可表示成图4.1(a)或(b)。按照惯常的方法，给各记号添加下标数字以表示相应的楼层。各个质点只能在水平方向移动，不能作转动和上下运动。即如果结构物的变形是剪切型的，各质点离静止位置的位移分别为x_1，x_2，如图所示，则系统的状态可以完全用这两个位移量来表示。也就是说，在这种情况下系统是两个质点的两个自由度系统。

首先来看第2层，质点m_2的加速度为$a=\ddot{x}_2$，弹簧k_2的恢复力为$P=-k_2(x_2-x_1)$。因此，代入式(1.2)就可得运动方程式为

$$-m_2\ddot{x}_2-k_2(x_2-x_1)=0 \tag{a}$$

这里(x_2-x_1)是两个质点m_2和m_1之间的位移差，即相对位移。对结构来说，就是第2层与第1层之间的层间位移。

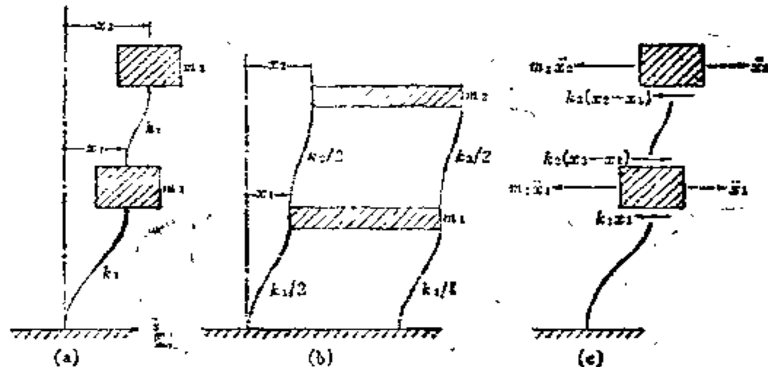


图4.1　两质点系统模型

其次来看第1层的质点m_1，作用力有加速度$\ddot{x}_1$产生的惯性力$-m_1\ddot{x}_1$，弹簧k_2的恢复力$k_2(x_2-x_1)$，以及弹簧k_1的恢复力$-k_1x_1$，运动方程式为

$$-m_1\ddot{x}_1+k_2(x_2-x_1)-k_1x_1=0 \tag{b}$$

式(a)和(b)都是考虑惯性力后的动力平衡方程式。象图4.1(c)那样将各质点分割开来考虑，就可以很好地理解这种动力平衡。

将式(b)和(a)改写成

$$m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \tag{4.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \tag{4.2}$$

如前所述，由x_1和x_2可以确定系统的状态即其空间位置。因为x_1和x_2是决定空间位置的量,它们在物理上是位移量，而在数学上可看作为坐标。也即为1.1节中所述广义坐标的一种。

在式（4.1）和（4.2）中，即在质点m_1和m_2的运动方程式中，都含有坐标x_1和x_2。因此，两个质点的运动不是互相独立的，它们彼此受另一个质点的运动的影响。这种质点或质点系的运动相互影响的现象叫做耦联,具有耦联性质的系统叫耦联系统。例如，在式（4.1）中，k_2x_2项表示质点m_1的运动与质点m_2的运动不是相互独立的，式（4.2)中的k_2x_1项则表示质点m_1的运动对质点m_2的运动的影响。这种存某个质点的运动方程式中表示另一个质点的影响的项称为耦联项。

在数学上，微分方程式（4.1）和微分方程式（4.2）相联立，是线性二阶常系数齐次常微分联立方程式。

式（4.1）和（4.2）也可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1+K_{11}x_1+K_{12}x_2=0\\m_2\ddot{x}_2+K_{21}x_1+K_{22}x_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}K_{11}=k_1+k_2\quad K_{12}=-k_2\\K_{21}=-k_2\qquad K_{22}=k_2\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

采用这种写法时，系数K_{ij}（$i,j=1,2$）的力学意义将在后面关于多质点系的章节中说明。特别应该记住的是如下关系成立

$$K_{12}=K_{21}\tag{4.5}$$

同时，这些系数还有如下关系

$$\left.\begin{aligned}K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21}=(k_1+k_2)k_2-k_2^2=k_1k_2>0\\K_{12}K_{21}=k_2^2>0\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

式（4.3）的联立微分方程组具有如下形式的解

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)=u_1e^{pt}\\x_2(t)=u_2e^{pt}\end{aligned}\right\}\tag{4.6}$$

式中u_1，u_2通常为复数常数。将式（4.6）代入式（4.3），便得

$$\left.\begin{aligned}(m_1p^2+K_{11})u_1+K_{12}u_2=0\\K_{21}u_1+(m_2p^2+K_{22})u_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

式（4.7）是关于u_1，u_2的二元一次齐次联立方程式。很明显，$u_1=u_2=0$是这个联立方程组的解，但这个解是表示静止状态的解。所以从讨论振动的角度来说，这个解是无意义的解。大家已经很清楚，一次齐次联立方程组具有非零解的充分必要条件是系数行列式为0，在这里就是

$$\begin{vmatrix}m_1p^2+K_{11} & K_{12}\\K_{21} & m_2p^2+K_{22}\end{vmatrix}=0\tag{d}$$

将上面行列式展开，便得关于p^2的二次方程式

$$(m_1p^2+K_{11})(m_2p^2+K_{22})-K_{12}K_{21}=0$$

或

$$p^4+\left(\frac{K_{11}}{m_1}+\frac{K_{22}}{m_2}\right)p^2+\frac{K_{11}}{m_1}\cdot\frac{K_{22}}{m_2}-\frac{K_{12}}{m_1}\cdot\frac{K_{21}}{m_2}=0\tag{4.8}$$

该方程式的两个根为

$$p^2=-\frac{1}{2}\left[\frac{K_{11}}{m_1}+\frac{K_{22}}{m_2}\pm\sqrt{\left(\frac{K_{11}}{m_1}+\frac{K_{22}}{m_2}\right)^2-4\left(\frac{K_{11}}{m_1}\cdot\frac{K_{22}}{m_2}-\frac{K_{12}}{m_1}\cdot\frac{K_{21}}{m_2}\right)}\right] \quad (e)$$

或

$$p^2=-\frac{1}{2}\left[\frac{K_{11}}{m_1}+\frac{K_{22}}{m_2}\pm\sqrt{\left(\frac{K_{11}}{m_1}-\frac{K_{22}}{m_2}\right)^2+4\frac{K_{12}}{m_1}\cdot\frac{K_{21}}{m_2}}\right] \quad (f)$$

然而，根据式（c）的第2式，式（f）的根号内为正。同时，根据式（c）的第1式，式（e）的〔 〕内始终为正。所以，两个根p^2均为负实数。这样，可以写成

$$p^2=-(\omega^{(1)})^2,\ -(\omega^{(2)})^2 \quad (g)$$

所以

$$p=\pm\mathrm{j}\omega^{(1)},\ \pm\mathrm{j}\omega^{(2)}$$

这里$\omega^{(1)}$和$\omega^{(2)}$称为耦联系统的固有圆频率，是仅由系统质量和弹簧常数决定的系统固有值。设式（g）的两个值中p^2绝对值小的一个，即与式（f）的双符号中的（−）号相对应的ω为$\omega^{(1)}$，而与（+）号相对应的p^2绝对值较大的一个ω为$\omega^{(2)}$，则有$\omega^{(1)}<\omega^{(2)}$，$\omega^{(1)}$就称为一阶固有圆频率，$\omega^{(2)}$为二阶固有圆频率。单质点系的情况下，固有频率只有一个ω，而在两个质点的两个自由度系统中存在这样两个固有频率，角标(1)、(2)则表示其大小顺序，即阶数。

最初假定的式（4.6）形式的解只满足这种特定的圆频率$\omega^{(1)}$，$\omega^{(2)}$，式（4.8）是确定这些圆频率值的方程式，称为特征方程式或频率方程式。用数学术语来说，这种特定的ω叫做频率方程式的固有值。

与$\omega^{(1)}$和$\omega^{(2)}$相对应的频率$\nu^{(1)}=\omega^{(1)}/2\pi$，$\nu^{(2)}=\omega^{(2)}/2\pi$分别称为一阶固有频率和二阶固有频率。同时，周期$T^{(1)}=2\pi/\omega^{(1)}=1/\nu^{(1)}$，$T^{(2)}=2\pi/\omega^{(2)}=1/\nu^{(2)}$分别称为一阶固有周期和二阶固有周期。

【例题4.1】 求由$m_1=0.050\mathrm{t\cdot s^2/cm}$，$m_2=0.055\mathrm{t\cdot s^2/cm}$，$k_1=k_2=120\mathrm{t/cm}$组成的两质点系的固有频率和固有周期。

〔解〕 由式（4.4），

$$K_{11}=240 \quad K_{12}=-120 \quad K_{21}=-120 \quad K_{22}=120 \quad (\mathrm{t/cm})$$

代入式（4.8）得

$$p^4+\left(\frac{240}{0.050}+\frac{120}{0.055}\right)p^2+\frac{240}{0.050}\cdot\frac{120}{0.055}-\frac{(-120)}{0.050}\cdot\frac{(-120)}{0.055}$$
$$=p^4+6982p^2+5236364=0$$

$$\therefore\quad p^2=-3491\pm\sqrt{(3491)^2-5236364}=-3491\pm2636$$
$$=-855,\ -6127$$

所以一阶和二阶固有圆频率、固有频率、固有周期分别如下：

$$\begin{aligned}&\omega^{(1)}=29.24 \quad \omega^{(2)}=78.28\ (\mathrm{rad/s})\\&\nu^{(1)}=4.65 \quad \nu^{(2)}=12.46\ (\mathrm{Hz})\\&T^{(1)}=0.215 \quad T^{(2)}=0.080\ (\mathrm{s})\end{aligned} \quad (4.9)$$

p^2 即固有圆频率的值一决定，就可求出两个质点的位移之间的关系。即由式（4.7）可得

$$\frac{u_2}{u_1}=-\frac{m_1p^2+K_{11}}{K_{12}}=-\frac{K_{21}}{m_2p^2+K_{22}} \tag{4.10}$$

式（4.7）是右边均为0的齐次方程式，所以不能求出u_1和u_2值本身的大小，但可以如上式那样定出它们的比值。现将式（g）代入式（4.10）中的p^2，就可求出对应于$\omega^{(1)}$和$\omega^{(2)}$的振幅比$\eta^{(1)}$和$\eta^{(2)}$分别为

$$\left.\begin{aligned}\eta^{(1)}=\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{(1)}=-\frac{K_{11}-m_1(\omega^{(1)})^2}{K_{12}}=-\frac{K_{21}}{K_{22}-m_2(\omega^{(1)})^2}\\ \eta^{(2)}=\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{(2)}=-\frac{K_{11}-m_1(\omega^{(2)})^2}{K_{12}}=-\frac{K_{21}}{K_{22}-m_2(\omega^{(2)})^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

式中的上标（1）、（2）分别表示对应一阶、二阶频率。很明显，振幅比$\eta^{(1)}$和$\eta^{(2)}$均为实数，都是只由系统特性确定的系统固有值。

设解的形式如式（4.6）所示，则得到4个值$p=\pm i\omega^{(1)},\pm i\omega^{(2)}$，且系数$u_1$和$u_2$之间有如式（4.11）的关系，所以联立微分方程组（4.3）的通解可由4个线性独立解的线性组合给出

$$\left.\begin{aligned}x_1=u_{11}e^{i\omega^{(1)}t}+u_{12}e^{-i\omega^{(1)}t}+u_{21}e^{i\omega^{(2)}t}+u_{22}e^{-i\omega^{(2)}t}\\ x_2=\eta^{(1)}u_{11}e^{i\omega^{(1)}t}+\eta^{(1)}u_{12}e^{-i\omega^{(1)}t}+\eta^{(2)}u_{21}e^{i\omega^{(2)}t}+\eta^{(2)}u_{22}e^{-i\omega^{(2)}t}\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

根据式（2.24）欧拉公式，有

$$\begin{aligned}x_1=&(u_{11}+u_{12})\cos\omega^{(1)}t+i(u_{11}-u_{12})\sin\omega^{(1)}t\\&+(u_{21}+u_{22})\cos\omega^{(2)}t+i(u_{21}-u_{22})\sin\omega^{(2)}t\\ x_2=&\eta^{(1)}(u_{11}+u_{12})\cos\omega^{(1)}t+i\eta^{(1)}(u_{11}-u_{12})\sin\omega^{(1)}t\\&+\eta^{(2)}(u_{21}+u_{22})\cos\omega^{(2)}t+i\eta^{(2)}(u_{21}-u_{22})\sin\omega^{(2)}t\end{aligned}$$

另外，设$u_{11}+u_{12}=A^{(1)}$，$i(u_{11}-u_{12})=B^{(1)}$，$u_{21}+u_{22}=A^{(2)}$，$i(u_{21}-u_{22})=B^{(2)}$，则因为位移x_1，x_2当然是实数，所以$A^{(1)}$，$B^{(1)}$，$A^{(2)}$，$B^{(2)}$也都必定是实数。换句话说，式（h）所表示的通解中的系数，u_{11}和u_{12}，以及u_{21}和u_{22}，必定互为共轭复数。由此，运动方程式的解可表示成

$$\left.\begin{aligned}x_1=A^{(1)}\cos\omega^{(1)}t+B^{(1)}\sin\omega^{(1)}t+A^{(2)}\cos\omega^{(2)}t+B^{(2)}\sin\omega^{(2)}t\\ x_2=\eta^{(1)}[A^{(1)}\cos\omega^{(1)}t+B^{(1)}\sin\omega^{(1)}t]+\eta^{(2)}[A^{(2)}\cos\omega^{(2)}t+B^{(2)}\sin\omega^{(2)}t]\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

进而还可根据经常用的式（2.14），用式（2.13）的形式表示为

$$\left.\begin{aligned}x_1=u_1^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})+u_1^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\\ x_2=u_2^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})+u_2^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

式中

$$u_2^{(1)}/u_1^{(1)}=\eta^{(1)},\ u_2^{(2)}/u_1^{(2)}=\eta^{(2)} \tag{4.14}$$

应该注意，在x_1和x_2的表达式中，右边的第一项和第二项是分别同相位的。

振幅比$\eta^{(1)}$和$\eta^{(2)}$已由式(4.11)定义，但将式（g）的p^2〔即式（f）〕代入式（4.11)的$-(\omega^{(1)})^2$和$-(\omega^{(2)})^2$时，应注意$\omega^{(1)}$对应于双符号中的（－）号，$\omega^{(2)}$对应于（＋）号，变成

$$\left.\begin{aligned}\eta^{(1)}&=-\frac{m_1}{2K_{12}}\left[\frac{K_{11}}{m_1}-\frac{K_{22}}{m_2}+\sqrt{\left(\frac{K_{11}}{m_1}-\frac{K_{22}}{m_2}\right)^2+4\frac{K_{12}K_{21}}{m_1m_2}}\right]\\ \eta^{(2)}&=-\frac{m_1}{2K_{12}}\left[\frac{K_{11}}{m_1}-\frac{K_{22}}{m_2}-\sqrt{\left(\frac{K_{11}}{m_1}-\frac{K_{22}}{m_2}\right)^2+4\frac{K_{12}K_{21}}{m_1m_2}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

但由式（4.4），有$K_{12}<0$，$K_{12}K_{21}>0$。所以，由上式很明显有

$$\left.\begin{aligned}\eta^{(1)}&>0\\ \eta^{(2)}&<0\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

【例题4.2】 求均匀系统的振幅比。每层的质量、弹簧常数（有阻尼时还包括阻尼常数）全都相等的系统称为均匀系统。

〔解〕 在两个质点的情况下，$m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k$，因此，$K_{11}=2k, K_{22}=k, K_{12}=K_{21}=-k$，代入式（4.15），得

$$\eta^{(1),(2)}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})=1.618,\ -0.618$$

【例题4.3】 求例题4.1的系统的振幅比。

〔解〕 将该例题中得出的值代入式（4.11），得

$$\eta^{(1)}=-\frac{240-(0.050)(855)}{(-120)}=1.644$$

$$\eta^{(2)}=-\frac{240-(0.050)(6127)}{(-120)}=-0.553$$

4.1.2 正则振型与固有函数

从式（4.13）可知，两个质点的无阻尼系统作自由振动时的通解，由两个固有圆频率分别为$\omega^{(1)}$和$\omega^{(2)}$的谐和振动组成。其中一个为

$$\left.\begin{aligned}x_1^{(1)}&=u_1^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})\\ x_2^{(1)}&=u_2^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

另一个为

$$\left.\begin{aligned}x_1^{(2)}&=u_1^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\\ x_2^{(2)}&=u_2^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

它们分别称为一阶和二阶正则振动。通解则由两个正则振动之和表示，即

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=x_1^{(1)}+x_1^{(2)}=u_1^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})+u_1^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\\ x_2(t)&=x_2^{(1)}+x_2^{(2)}=u_2^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})+u_2^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

由于$\omega^{(1)}\neq\omega^{(2)}$，由这种和式表示的振动已不再是谐和振动。而且，一般情况下$\omega^{(1)}$和$\omega^{(2)}$之比不是整数，所以也不是周期振动，其振动情况很复杂。

然而，看一下正则振动即式（4.17）和式（4.18）表示的各个分量，就可知道两个质点以相同频率和相同相位作谐和振动。同时由式（4.14）可知两个质点的位移始终保持一定的比率。如用图形来表示这种振动方式，就如图4.2所示。也就是说，各个分量的振动形态具有如下特征：两个质点同时通过中间位置，同时到达最大位移点，在从中间位置到最大位移点之间的任何瞬间，两个质点的位移也始终保持一定的比率。但如式（4.16）所示，位移比值为$\eta^{(1)}>0$，$\eta^{(2)}<0$，所以式（4.17）所表示的分量，使两质点始终在中间位置的同侧，而式(4.18）的分量则使两质点始终在相反的两侧。

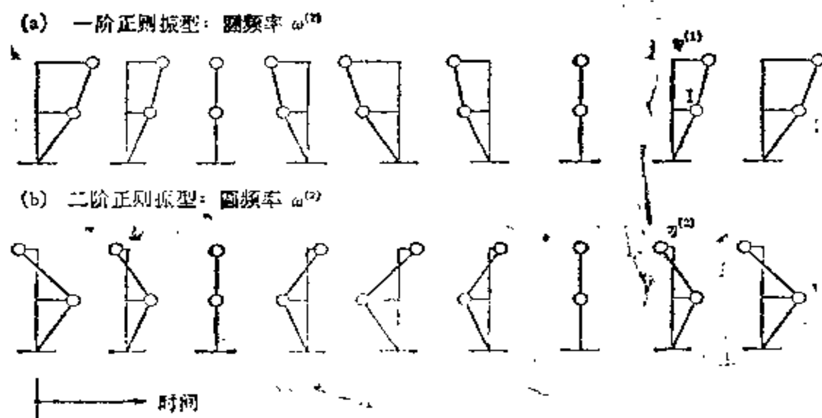


图4.2　正则振动系统

这种特定的方式或运动形态称为耦联系统的正则振型，或简称为振型。且对应于一阶固有频率的正则振型叫做一阶正则振型或一阶振型，对应于二阶固有频率的正则振型叫做二阶正则振型或二阶振型。也即式（4.17）或图4.2(a)表示一阶振型，式（4.18）或图4.2(b)表示二阶振型。在符号表示上，用下标1，2表示质点或层的编号，而用上角标（1）、（2）表示振型阶数。如$u_1^{(2)}$表示质点m_1的二阶振型的振幅。

这种正则振型是以系统固有频率作振动的形态，质点的位移也与时间无关而始终保持系统固有的比率。因此正则振型本身是系统固有的性质，在这个意义上它也可以称为固有型或固有振型。同时把给出固有振型的各质点振幅$u_1^{(1)}$，$u_2^{(1)}$，$u_1^{(2)}$，$u_2^{(2)}$称为固有函数，$u_1^{(1)}$和$u_2^{(1)}$是一阶固有函数，$u_1^{(2)}$和$u_2^{(2)}$是二阶固有函数。质点共有两个，对各个正则振型说来，一个质点的位移给定后，另一个质点的位移就以系统固有的方式与它相关联，因而也就确定了其位移值。也就是说，自由度只有一个。在这个意义上，两个正则振动可以解释为分别各与一个单自由度系统的振动等价。

自由振动的通解如式（4.13）所示，除系统的固有圆频率$\omega^{(1)}$，$\omega^{(2)}$之外，还包含$u_1^{(1)}$，$u_1^{(2)}$，$u_2^{(1)}$，$u_2^{(2)}$，$\phi^{(1)}$，$\phi^{(2)}$等六个常数。但如上面所述，$u_1^{(1)}$和$u_2^{(1)}$，以及$u_1^{(2)}$和$u_2^{(2)}$，是根据式（4.14）由已知的比率$\eta^{(1)}$和$\eta^{(2)}$相关联的，所以未定常数实际是四个。这些常数可由运动的初始条件，即对两个质点分别给出的初位移和初速度共四个初始值来确定。

也可以将初始条件代入式（4.12）的两个式子和将它们对时间微分后所得的两个速度式子，求出这四个未知数$A^{(1)}$，$A^{(2)}$，$B^{(1)}$，$B^{(2)}$。

【例题4.4】 如图4.1所示两个质点的无阻尼系统，初始条件为$x_1(0)=x_2(0)=0$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_0$，$\dot{x}_2(0)=0$，求其解。

〔解〕 由式（4.12），有

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A^{(1)}\cos\omega^{(1)}t+B^{(1)}\sin\omega^{(1)}t+A^{(2)}\cos\omega^{(2)}t+B^{(2)}\sin\omega^{(2)}t\\x_2&=\eta^{(1)}A^{(1)}\cos\omega^{(1)}t+\eta^{(1)}B^{(1)}\sin\omega^{(1)}t+\eta^{(2)}A^{(2)}\cos\omega^{(2)}t+\eta^{(2)}B^{(2)}\sin\omega^{(2)}t\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

对时间微分后得

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=-A^{(1)}\omega^{(1)}\sin\omega^{(1)}t+B^{(1)}\omega^{(1)}\cos\omega^{(1)}t-A^{(2)}\omega^{(2)}\sin\omega^{(2)}t+B^{(2)}\omega^{(2)}\cos\omega^{(2)}t\\\dot{x}_2&=-\eta^{(1)}A^{(1)}\omega^{(1)}\sin\omega^{(1)}t+\eta^{(1)}B^{(1)}\omega^{(1)}\cos\omega^{(1)}t-\eta^{(2)}A^{(2)}\omega^{(2)}\sin\omega^{(2)}t\\&\quad+\eta^{(2)}B^{(2)}\omega^{(2)}\cos\omega^{(2)}t\end{aligned}\right\}(b)$$

将初始条件代入上面四式：

$$A^{(1)}+A^{(2)}=0\,,\quad \eta^{(1)}A^{(1)}+\eta^{(2)}A^{(2)}=0\,,\quad \therefore A^{(1)}=A^{(2)}=0$$

$$B^{(1)}\omega^{(1)}+B^{(2)}\omega^{(2)}=\dot{x}_0,\quad \eta^{(1)}B^{(1)}\omega^{(1)}+\eta^{(2)}B^{(2)}\omega^{(2)}=0\,,$$

$$\therefore\quad B^{(1)}=-\frac{\eta^{(2)}}{\eta^{(1)}-\eta^{(2)}}\cdot\frac{\dot{x}_0}{\omega^{(1)}},\qquad B^{(2)}=\frac{\eta^{(1)}}{\eta^{(1)}-\eta^{(2)}}\cdot\frac{\dot{x}_0}{\omega^{(2)}}$$

因此，质点的位移如下：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{\dot{x}_0}{\eta^{(1)}-\eta^{(2)}}\left[-\frac{\eta^{(2)}}{\omega^{(1)}}\sin\omega^{(1)}t+\frac{\eta^{(1)}}{\omega^{(2)}}\sin\omega^{(2)}t\right]\\x_2&=\frac{\eta^{(1)}\eta^{(2)}\dot{x}_0}{\eta^{(1)}-\eta^{(2)}}\left[-\frac{1}{\omega^{(1)}}\sin\omega^{(1)}t+\frac{1}{\omega^{(2)}}\sin\omega^{(2)}t\right]\end{aligned}\right\}$$

【例题4.5】 例题4.1的系统处于静止状态时，给质点m_1加上初速度 10cm/s。用图表示两个质点的位移和正则振动的时间历程。

〔解〕 由例题4.1，$\omega^{(1)}=29.24$，$\omega^{(2)}=78.28$rad/s，同时根据例题4.3，$\eta^{(1)}=1.644$，$\eta^{(2)}=-0.553$，因为$\dot{x}_0=10$cm/s，所以由上一例题的结果可得

$$x_1=\frac{10}{1.644-(-0.553)}\left[-\frac{(-0.553)}{29.24}\sin 29.24t+\frac{1.644}{78.28}\sin 78.28t\right]$$

$$x_2=\frac{1.644(-0.553)\times 10}{1.644-(-0.553)}\left[-\frac{1}{29.24}\sin 29.24t+\frac{1}{78.28}\sin 78.28t\right]$$

即

$$\left.\begin{aligned}x_1&=0.0861\sin 29.24t+0.0956\sin 78.28t\ \ (\text{cm})\\x_2&=0.1415\sin 29.24t-0.0529\sin 78.28t\ \ (\text{cm})\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

图 4.3 表示一阶和二阶正则振动以及它们的和，即质点m_1，m_2的位移x_1，x_2。

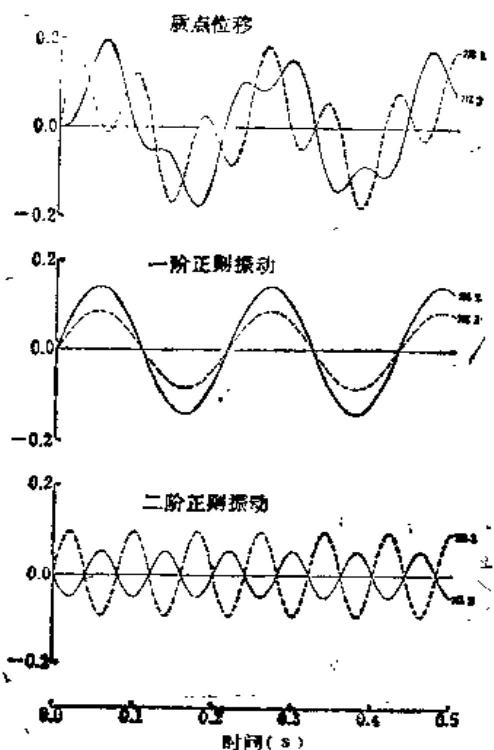


图4.3 两质点系的振动，初始条件为 $x_1(0)=x_2(0)=0$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_0$，$\dot{x}_2(0)=0$

【例题4.6】 两个质点的无阻尼系统，初始条件为$x_1(0)=x_0$，$x_2(0)=\eta^{(1)}x_0$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$。试求其解，并讨论其结果。

〔解〕 将给定的初始条件代入式(a)和(b)，则有

$$A^{(1)}+A^{(2)}=x_0,\qquad \eta^{(1)}A^{(1)}+\eta^{(2)}A^{(2)}=\eta^{(1)}x_0$$

$$B^{(1)}\omega^{(1)}+B^{(2)}\omega^{(2)}=0,\ \eta^{(1)}B^{(1)}\omega^{(1)}+\eta^{(2)}B^{(2)}\omega^{(2)}=0$$

由此可得$A^{(1)}=x_0$，$A^{(2)}=B^{(1)}=B^{(2)}=0$，所以两个质点的运动可表示为

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=x_0\cos\omega^{(1)}t\\x_2(t)&=\eta^{(1)}x_0\cos\omega^{(1)}t\end{aligned}\right\}$$

这是频率为$\omega^{(1)}$，且两质点相位相同并始终保持一定的振幅比$x_2(t)/x_1(t)=\eta^{(1)}$的振动，即系统的一阶正则振动。

同样，如果给定的初始条件为$x_1(0)=x_0$，$x_2(0)=\eta^{(2)}x_0$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$，则可得二阶正则振动

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=x_0\cos\omega^{(2)}t\\x_2(t)&=\eta^{(2)}x_0\cos\omega^{(2)}t\end{aligned}\right\}$$

这样，只要适当选择初始条件，也即使两个质点预先处于一个正则振型位置，并不加初速度从该位置释放，就可以抑制它使之不产生另一正则振型的振动，而使系统仅以式(4.17)或式（4.18）所表示的单纯一种正则振型来振动。

4.1.3 固有函数的正交性

式（4.17）和式（4.18）所示的一阶和二阶固有函数$u_1^{(1)}$，$u_2^{(1)}$和$u_1^{(2)}$，$u_2^{(2)}$，本来是在式(4.10）中取p^2为$-(\omega^{(1)})^2$和$-(\omega^{(2)})^2$时的解。因此下面的式子自然成立：

$$\left.\begin{aligned}m_1(\omega^{(1)})^2u_1^{(1)}&=K_{11}u_1^{(1)}+K_{12}u_2^{(1)}\\m_2(\omega^{(1)})^2u_2^{(1)}&=K_{21}u_1^{(1)}+K_{22}u_2^{(1)}\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}m_1(\omega^{(2)})^2u_1^{(2)}&=K_{11}u_1^{(2)}+K_{12}u_2^{(2)}\\m_2(\omega^{(2)})^2u_2^{(2)}&=K_{21}u_1^{(2)}-K_{22}u_2^{(2)}\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

现将式（a）中第1个式子乘以$u_1^{(2)}$，第2个式子乘以$u_2^{(2)}$，同时式（b)的第1个式子乘以$u_1^{(1)}$，第2个式子乘以$u_2^{(1)}$，然后分别相加，便得

$$\left.\begin{aligned}(\omega^{(1)})^2(m_1u_1^{(1)}u_1^{(2)}+m_2u_2^{(1)}u_2^{(2)})&=K_{11}u^{(1)}u_1^{(2)}+K_{12}u_2^{(1)}u^{(2)}+K_{21}u_1^{(1)}u_2^{(2)}\\&\quad+K_{22}u_2^{(1)}u_2^{(2)}\\(\omega^{(2)})^2(m_1u_1^{(2)}u_1^{(1)}+m_2u_2^{(2)}u_2^{(1)})&=K_{11}u_1^{(2)}u_1^{(1)}+K_{12}u_2^{(2)}u^{(1)}+K_{21}u_1^{(2)}u_2^{(1)}\\&\quad+K_{22}u_2^{(2)}u_2^{(1)}\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

但根据式（4.4），$K_{12}=K_{21}$，所以上面两个式子的右边完全相等。因此，上两式之差为$[(\omega^{(1)})^2-(\omega^{(2)})^2](m_1u_1^{(1)}u_1^{(2)}+m_2u_2^{(1)}u_2^{(2)})=0$，因为$\omega^{(1)}\neq\omega^{(2)}$，所以有如下关系：

$$m_1u_1^{(1)}u_1^{(2)}+m_2u_2^{(1)}u_2^{(2)}=\sum_{i=1}^{2}m_iu_i^{(1)}u_i^{(2)}=0\tag{4.20}$$

这个关系称为一阶固有函数和二阶固有函数对于质量的正交性。

因为式（4.20）成立，所以式（c）的右边也为0，

$$K_{11}u_1^{(1)}u_1^{(2)}+K_{12}u_2^{(1)}u_1^{(2)}+K_{21}u_1^{(1)}u_2^{(2)}+K_{22}u_2^{(1)}u_2^{(2)}=0\tag{4.21}$$

式（4.21）称为固有函数关于刚度的正交性。关于固有函数的正交性将在第五章和第六章中详细叙述。

【例题4.7】 利用例题4.5的结果证明固有函数的正交性。

〔解〕 由例题4.5的式（c），固有函数为

$$u_1^{(1)}=0.0861\text{cm}\qquad u_1^{(2)}=0.0956\text{cm}$$
$$u_2^{(1)}=0.1415\text{cm}\qquad u_2^{(2)}=-0.0529\text{cm}$$

同时，质点的质量为$m_1=0.050$，$m_2=0.055(\text{t}\cdot\text{s}^2/\text{cm})$

将这些数值代入式（4.20），便得

$$\begin{aligned}m_1u_1^{(1)}u_1^{(2)}+m_2u_2^{(1)}u_2^{(2)}&=0.050\times0.0861\times0.0956+0.055\times0.1415\times(-0.0529)\\&=0.000412-0.000412=0\end{aligned}$$

另外，弹簧常数为$K_{11}=240$，$K_{12}=K_{21}=-120$，$K_{22}=120\text{t/cm}$，将这些数值代入式(4.21)，有

$$K_{11}u_1^{(1)}u_1^{(2)}+K_{12}u_2^{(1)}u_1^{(2)}+K_{21}u_1^{(1)}u_2^{(2)}+K_{22}u_2^{(1)}u_2^{(2)}$$
$$=240\times0.0861\times0.0956+(-120)\times0.1415\times0.0956$$
$$+(-120)\times0.0861\times(-0.0529)+120\times0.1415\times(-0.0529)$$
$$=1.975-1.623+0.546-0.898=0$$

4.2 坐标的耦联

4.2.1 耦联与非耦联

前面已给出了表示两质点系的运动微分方程式（4.3），即

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+K_{11}x_1+K_{12}x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2+K_{21}x_1+K_{22}x_2=0 \end{aligned}\right\}$$

式中选用 x_1，x_2 坐标来表示两个质点的位移，这两个微分方程式都包含这两个未知函数。因此，在求未知函数时必须将两个微分方程式联立求解。

像这样表示振动位移的两个以上坐标出现在同一个运动方程式中时，就称这些坐标之间存在静力耦联、弹性耦联或位移耦联。

另外，与上式情况不同，当一个微分方程式中出现两个以上的加速度（$\ddot{x}$）项时，称为在坐标之间有动力耦联、质量耦联或加速度耦联。

某个系统中是否存在耦联取决于用以表示运动的坐标的选择方法，而与系统本身的特性无关。一般说来，为了表示多质点系的运动状态，可以选用的独立坐标系，即1.1节中所述的广义坐标，有好几种。根据选择坐标的不同，系统可以是静力耦联、动力耦联、静力兼动力耦联、或非耦联的（即完全无耦联的）。这可用图4.4的例子来说明。当然，耦联的数目越少，微分方程式越简单。

首先，如图4.4(a）所示，用质点 m_1 的位移 x_1 和质点 m_2 的位移 x_2 这两个坐标来表示系统的振型。在式（4.1）和式（4.2）中已给出表示系统运动的微分方程式为：

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1\underline{-k_2x_2}=0 \\ m_2\ddot{x}_2\qquad\underline{-k_2x_1}+k_2x_2=0 \end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

下面划了一道杠的 $-k_2$ 项构成了静力耦联。

其次如图4.4(b）所示，选择质点 m_1 的位移 q_1 和质点 m_2 与 m_1 之间的相对位移 q_2 为两个坐标。这时

$$x_1=q_1,\quad x_2=q_1+q_2\qquad(4.22)$$

代入式（a），便有 $m_1\ddot{q}_1+k_1q_1-k_2q_2=0$，$m_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)+k_2q_2=0$，如将这两式之和以及第2式作为联立方程式，则成

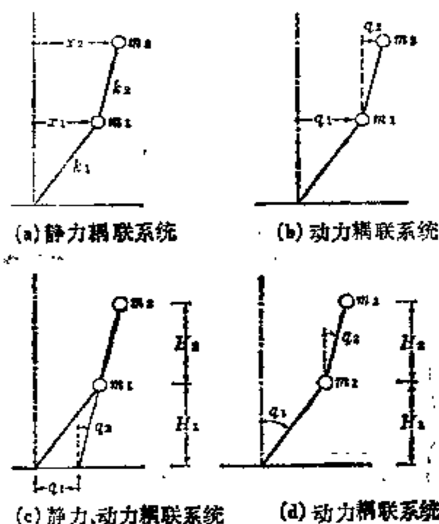


图4.4 耦联系统与坐标

$$\left.\begin{aligned} (m_1+m_2)\ddot{q}_1+\underline{m_2}\ddot{q}_2+k_1q_1=0 \\ \underline{m_2}\ddot{q}_1+m_2\ddot{q}_2+k_2q_2=0 \end{aligned}\right\}$$

由于包含 m_2 的项，系统成为动力耦联系统。

再如图4.4(c）所示，以连结两质点的直线与地面的交点的坐标为 q_1，该直线与垂直方

向所夹的转角为q_2，并选择这样的q_1和q_2作为广义坐标。当q_2为微小量时，两质点的位移可示成

$$\left.\begin{aligned} x_1&=q_1+H_1q_2\\ x_2&=q_1+(H_1+H_2)q_2\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

代入式(a)可得：$m_1(\ddot{q}_1+H_1\ddot{q}_2)+k_1q_1+(k_1H_1-k_2H_2)q_2=0$，$m_2[\ddot{q}_1+(H_1+H_2)\ddot{q}_2]+k_2H_2=0$，将这两式之和以及第1式乘以$H_1$后与第2式乘以$(H_1+H_2)$后相加之和组成联立方程式，则成

$$\left.\begin{aligned} &(m_1+m_2)\ddot{q}_1+[m_1H_1+m_2(H_1+H_2)]\ddot{q}_2+k_1q_1+k_1H_1q_2=0\\ &[m_1H_1+m_2(H_1+H_2)]\ddot{q}_1+[m_1H_1^2+m_2(H_1+H_2)^2]\ddot{q}_2+k_1H_1q_1\\ &\quad+(k_1H_1^2+k_2H_2^2)q_2=0\end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

可以看出，由$m_1H_1+m_2(H_1+H_2)$项构成动力耦联，由k_1H_1项构成静力耦联。

最后如图4.4(d)所示，以m_1与系统基底的连线和m_1与m_2的连线分别与垂直方向所成的转角q_1和q_2作为广义坐标。可以看出，这与图(b)的情况相同，也构成动力耦联。

然而，在下一节中可以看到，如果适当地选择不同于图4.4所示坐标的其它坐标，有可能使系统成为完全没有耦联作用的非耦联系统。

4.2.2 正则坐标

从上一节的各个式子，特别是式(4.24)中，可以知道，两质点无阻尼系统的运动方程式以$q_1(t)$，$q_2(t)$为广义坐标可写成如下最一般的形式：

$$\left.\begin{aligned} M_{11}\ddot{q}_1+M_{12}\ddot{q}_2+K_{11}q_1+K_{12}q_2=0\\ M_{21}\ddot{q}_1+M_{22}\ddot{q}_2+K_{21}q_1+K_{22}q_2=0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

式中M_{ij}和K_{ij} $(i\neq j)$分别表示动力和静力耦联项。

然而，如果坐标选择得当，可使式(a)中的耦联项为$M_{ij}=0$，$K_{ij}=0$ $(i\neq j)$。即总是可以使微分方程式不联立，在每个式子分别只含一个未知数而与另一未知数无关的情况下求解。如果能得到这种独立的运动方程式，则作为方程解求出的系统各个分量的运动与其它各分量的运动无关，分别作具有各自固有的振幅、频率和相位的单自由度振动，即谐和振动，问题就大大简化了。

这种经特别选择的、可使方程式写成既无动力耦联又无静力耦联形式的坐标称为正则坐标。下面简单说明这种正则坐标的选法。

前面已经说过，系统特性给定后，作为系统固有的一阶和二阶正则振型即固有函数就确定了。于是，各质点的实际位移可表示为固有函数分别乘上系数$q^{(1)}(t)$和$q^{(2)}(t)$后的线性组合：

$$\left.\begin{aligned} x_1=u_1^{(1)}q^{(1)}+u_1^{(2)}q^{(2)}\\ x_2=u_2^{(1)}q^{(1)}+u_2^{(2)}q^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

图4.5用图形表示了上述关系。换句话说，式(4.25)是将系统的实际振动形状分解为正则振型的表达式。求出了系数$q^{(1)}$和$q^{(2)}$，实际位移x_1，x_2就完全可确定。因此也可将$q^{(1)}$，$q^{(2)}$作为新的坐标表示系统的运动。

从式(4.25)解出$q^{(1)}$，$q^{(2)}$，就得

$$\left.\begin{aligned} q^{(1)}=(u_2^{(2)}x_1-u_1^{(2)}x_2)/(u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_2^{(1)}u_1^{(2)})\\ q^{(2)}=(u_1^{(1)}x_2-u_2^{(1)}x_1)/(u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_2^{(1)}u_1^{(2)})\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

前面求出的两质点系的自由振动通解表达式（4.13）中的x_1和x_2代入式（4.26）的第1式，得

$$
\begin{aligned}
q^{(1)}=&[u_2^{(2)}u_1^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})+u_2^{(2)}u_1^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})\\
&-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})-u_1^{(2)}u_2^{(2)}\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})]/(u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_2^{(1)}u_1^{(2)})\\
=&\cos(\omega^{(1)}t+\phi^{(1)})
\end{aligned}
$$

同样，将式（4.13）代入式（4.26）的第2式，可得

$$q^{(2)}=\cos(\omega^{(2)}t+\phi^{(2)})$$

从这些式子中可以看出，$q^{(1)}$和$q^{(2)}$分别满足如下方程式：

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{q}^{(1)}+(\omega^{(1)})^2q^{(1)}=0\\
\ddot{q}^{(2)}+(\omega^{(2)})^2q^{(2)}=0
\end{aligned}\right\}\tag{4.27}
$$

在上式中，坐标$q^{(1)}$和$q^{(2)}$分别由彼此独立的微分方程式表示，相互之间没有耦联。因此，它们就是要求的正则坐标。式（4.27）中的两个式子都是单质点无阻尼系统的运动方程式。例如，它们与式（2.6）形式是完全相同的。因此，可以看出，坐标$q^{(1)}$，$q^{(2)}$都是作独立的谐和振动。而且根据式（4.27），其圆频率分别为$\omega^{(1)}$和$\omega^{(2)}$。

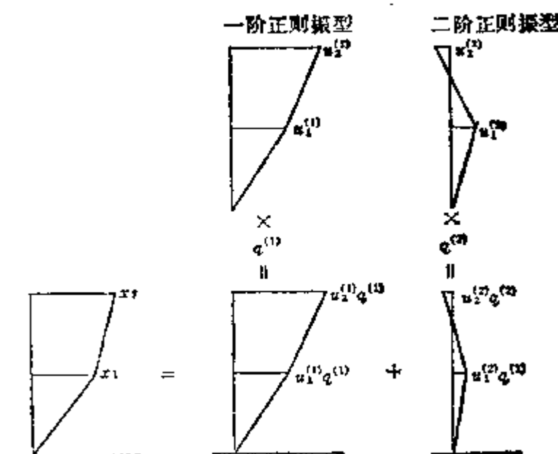


图4.5　用正则振型表示位移

解这些简单运动方程式得出$q^{(1)}$和$q^{(2)}$后，便立即可由式（4.25）求出系统的实际位移x^1和x_2。式（4.25）和式（4.26）是给出实际位移的坐标x_1、x_2与正则坐标$q^{(1)}$、$q^{(2)}$之间的坐标变换式。

这种正则坐标的存在与4.1.3节中所述的固有函数的正交性之间有极其密切的关系。这方面的问题将以较一般的多质点系为研究对象，在第六章中详细叙述。

4.2.3　有阻尼自由振动

有阻尼的两质点系模型如图4.6(b)所示，考虑在层间设置阻尼器，通常可简化为图4.6(a)。各阻尼器产生的粘滞阻力与活塞和圆筒之间的相对速度成比例，也即对阻尼器c_1来说粘滞阻力与$\dot{x}_1$成比例，对阻尼器c_2来说粘滞阻力与质点间的相对速度$\dot{x}_2-\dot{x}_1$成比例，比例常数分别为阻尼系数c_1和c_2。

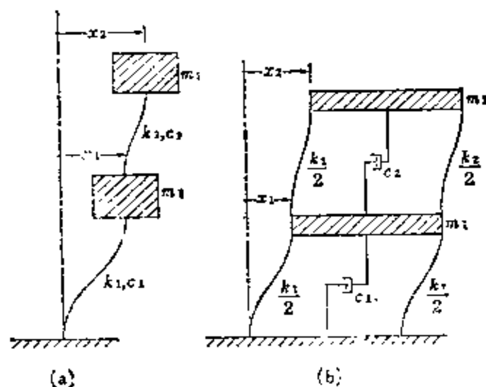


图4.6　有阻尼的两质点系统模型

系统除了惯性力与弹簧恢复力之外，还作用有阻尼器产生的阻力，所以在式（4.1）和式(4.2）上加上阻尼项后，可得系统的运动方程式为

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2\\
&\quad+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0\\
&m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1\\
&\quad+k_2x_2=0
\end{aligned}\tag{4.28}
$$

式（4.28）可写成

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1+C_{11}\dot{x}_1+C_{12}\dot{x}_2+K_{11}x_1+K_{12}x_2=0\\ m_2\ddot{x}_2+C_{21}\dot{x}_1+C_{22}\dot{x}_2+K_{21}x_1+K_{22}x_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4.29}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&C_{11}=c_1+c_2 \qquad C_{12}=-c_2\\ &C_{21}=-c_2 \qquad C_{22}=c_2\\ &K_{11}=k_1+k_2 \qquad K_{12}=-k_2\\ &K_{21}=-k_2 \qquad K_{22}=k_2\end{aligned}\right\}$$

式（4.28）或式（4.29）中不仅有x_1，x_2，还出现$\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$。所以在这种情况下，坐标x_1,x_2之间还存在阻尼耦联或速度耦联。

在具有这种耦合时，4.2.2节中所述的将运动方程式非耦联化的正则坐标严格来说是不存在的。因此问题的解法变得十分困难，在实用上有必要适当引入关于系统阻尼的某种假设。但是，关于有阻尼时的精确解法或以某种条件为前提的有阻尼系统的近似解法，与其把它放在两质点系问题中讨论，还不如在下一章中利用矩阵表示法作为多质点系理论的一个环节来处理更容易理解，所以决定不在本章中更多涉及。

第五章 矩　　阵

到前章为止，处理了单质点系统和两质点系统的振动问题。回顾在第四章中处理过的两质点系的问题，比起单质点系来，虽然系统的自由度只增加一个，但是公式的形式和演算都变得相当烦杂，乍一看来，往往难以理解。今后在处理更一般的多质点系的问题时，若仍采用这种方法，最后会使结果十分烦杂，而且也难以付诸实用。这一章介绍的矩阵法可以避免这类麻烦，它能把本质复杂的公式和运算，表示成一目了然的简明而又容易理解的形式。在第六章中叙述多质点系的振动理论时，也采用矩阵表示法。这对于把问题表示成数学式子和对式求解这两个方面，都是十分有效的。

5.1 基 本 定 义

a. 矩阵

把元素按矩形配置成阵列称为矩阵，有时也称之为行列。例如，将$m\times n$个元素按下式排列时

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]=[A]$$

称之为m行n列矩阵。在矩形阵列中沿横向排列的为行，沿竖向排列的为列。

矩阵的元素可以是数，也可以是变量，函数，表达式或矩阵本身。而且这些元素的单位也不必相同。

因此，矩阵只不过是一种排列，本身没有数值可言。但是这里要处理的数学对象是元素排列的整体，用一种记号来表示这种处理往往会十分方便。所谓用一种记号来表示，习惯上常常采用如式（5.1）所示的$[a_{ij}]$，$[A]$等各种方法。在本书中，当问题是以元素排列的整体为主要研究对象时采用$[A]$的形式，当以单个元素为主要研究对象时便采用记号$[a_{ij}]$。在后一种情况，第1个下标表示元素所在行的序号，第2个下标表示所在列的序号，由ij这两个下标，便可表示元素在阵列中的位置。

b. 方阵

行数和列数相等的矩阵称为方阵。一个n行n列的方阵，可以简单地称为n次矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

为 4 次矩阵。在方阵中从左上角到右下角的元素排列（如上面点线所表示的位置那样）称为主对角线，位于主对角线上的元素称为主对角元素。反之，不在主对角线上的元素统称为非对角元素。显然主对角元素是由a_{ii}来表示的。

c. 对称矩阵

方阵中相对于主对角线对称位置上的元素互相相等时，称为对称矩阵，即有关系式$a_{ij}=a_{ji}$成立，例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

就是对称矩阵。与对称矩阵相对应的，位于对称位置上的元素只是符号相反，且主对角元素均为 0，即$a_{ij}=-a_{ji}$，$a_{ii}=0$，这样的矩阵称为反对称矩阵。

d. 对角矩阵

所有非对角元素均为 0 的方阵称为对角矩阵，即，此时有$a_{ij}=0$ $(i \neq j)$成立，例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

就是对角矩阵。为了表示对角矩阵$[A]=[a_{ij}]$，在对角线方向划一短线，往往写成

$$[\diagdown A \diagdown]=[\diagdown a_{ij} \diagdown]$$

在不致发生误解的情况下，对角矩阵中元素为0的地方，也容许不把0写出而留以空白来表示。

e. 三角矩阵

方阵中位于主对角线下侧或上侧的全部元素为 0 时，该方阵可称为三角矩阵。特别是，对于主对角线下侧的元素为 0 的三角矩阵称为上三角矩阵，对于主对角线上侧的元素为 0 的三角矩阵称为下三角矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

分别为上三角矩阵和下三角矩阵。

f. 单位矩阵

主对角元素全部为 1 的对角矩阵称为单位矩阵，用记号$[\diagdown I \diagdown]$表示，例如

$$[\diagdown I \diagdown]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为 4 次单位矩阵。

g. 零矩阵

全部元素均等于零的矩阵称为零矩阵，用$[0]$表示，零矩阵不一定是方阵。

h. 列矩阵

只有一列的矩阵称为列矩阵，或者称为列矢量或简称为矢量。n 行 1 列称 n 次列矩阵或 n 维列矢量，例如

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

为4次列矩阵或4 维矢量。对于这一类矢量，通常用括号围起来写成{ }。矢量元素称为它的分量。

i. 行矩阵

例如象

$$\{3 \quad 4 \quad 9 \quad 5\}$$

这一类的 1 行 n 列矩阵称为行矩阵或行矢量。这时也用括号围起来，写成{ }，各元素也称为分量。

k. 转置矩阵

对任一矩阵的行和列进行交换称为转置，由转置得到的矩阵称为原矩阵的转置矩阵，并用$[A]^T$表示矩阵$[A]$的转置矩阵。下式

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 8 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

便是一例。换言之，用元素a_{ji}代替元素a_{ij}所得的矩阵便是转置矩阵，如果矩阵$[A]$为m行 n 列，$[A]^T$便为 n 行m列。而且转置矩阵的转置矩阵当然就是原矩阵，可用

$$([A]^T)^T = [A] \tag{5.2}$$

来表示。此外，对于方阵的转置矩阵，如

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

那样，把矩阵以主对角线为轴翻转过来便可得到。因此当矩阵$[A]$为对称矩阵时，便有

$$[A]^T = [A] \tag{5.3}$$

此外对于对角矩阵自然也有$\lceil A \rfloor^T = \lceil A \rfloor$。与此对应的，在反对称矩阵情况下，便为$[A]^T = -[A]$。列矢量的转置矩阵为行矢量，行矢量的转置矩阵则为列矢量。因此存在如下关系：

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}^T = \{3 \quad 8 \quad 5 \quad 1\}$$

利用这个关系，便可将列矢量

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

用

$$\{3 \quad 8 \quad 5 \quad 1\}^T$$

来替代以节约书写的篇幅。在本书中有时也采用这种书写方式。

再者，一行一列的矩阵当然是标量，将它转置后，仍然是原来的标量。

5.2 矩阵的运算

5.2.1 简单运算

a. 矩阵的相等

假若两个矩阵同形，即它们的行数和列数对应相等，而且对应的元素全都相等，则称这两个矩阵相等。即对于所有的 i 和 j，若有

$$a_{ij}=b_{ij}，\text{则}[A]=[B] \tag{5.4}$$

b. 矩阵的加减

对于所有的 i 和 j，若

$$a_{ij}\pm b_{ij}=c_{ij}$$

成立时，便有

$$[A]\pm[B]=[C] \tag{5.5}$$

成立。但是$[A]$，$[B]$，$[C]$都必须是同形的。假若

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

则有

$$[A]+[B]=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 12 \\ 10 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

和

$$[A]-[B]=\begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 \\ 4 & -11 & 13 \end{bmatrix}$$

此外，若有

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

便有

$$[A]+[A]^T=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 12 & 14 & 6 \\ 12 & 4 & 8 & 9 \\ 14 & 8 & 12 & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 14 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

成立，得到一个对称矩阵。

【定理1】 任一方阵与其转置矩阵之和为一对称矩阵。

c．标积

当 c 为标量时，便有

$$c\,[a_{ij}]=[ca_{ij}] \tag{5.7}$$

成立，例如

$$-3\begin{bmatrix}2 & -5 & 7\\ -8 & 6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 15 & -21\\ 24 & -18 & 9\end{bmatrix}$$

$$2\begin{Bmatrix}3\\8\\5\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6\\16\\10\\2\end{Bmatrix}$$

这样的标积，必须对全部元素都乘以标量。若要对矩阵的某一行或某一列乘以某个数，必须采用别的方法，这在下面再讲。

5.2.2 矩阵的积

若矩阵$[A]$的列数和矩阵$[B]$的行数相等，就能定义

$$[A][B]=[C]$$

为矩阵的积，设$[A]$为 m 行 n 列，$[B]$为 n 行 p 列，则$[C]$便为 m 行 p 列的矩阵，并可用记号

$$(m,\ n)\times(n,\ p)=(m,\ p) \tag{5.8}$$

来表示。而这时积$[C]$的元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{5.9}$$

所定义。若用图5.1的福尔克(Falk)图表来表示这个关系，就更容易理解。也就是将矩阵$[A]$，$[B]$如图(a)所示那样配置，并按图(b)所示的虚线那样把对应的元素同时彼此相乘，再求其积的和，便可得到式(5.9)所示的$[C]$的元素值。若将此值记在$[A]$的 i 行和$[B]$的 j 列的交差格点内，便可在图(b)的实线框内得到表示积$[C]=[A][B]$的矩阵。

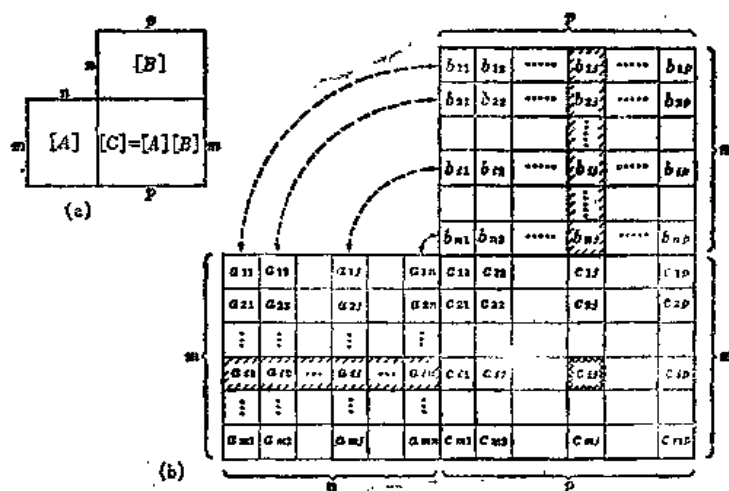


图5.1 福尔克图

为了求得积$[A][B]$，$[A]$的列数和$[B]$的行数必须相等——称$[A]$和$[B]$是匹配的，利用这个图，理解起来就更容易。下面，给

出几个计算积的例子。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 3 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 8 \\ 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 27 & 25 \\ 16 & 22 & 22 \\ 31 & 48 & 29 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \tag{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.13}$$

$$\{1 \quad 2 \quad -1\} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \{7 \quad 7 \quad 0\}$$

$$\{1 \quad 2 \quad -1\} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = 9 \tag{c}$$

$$\{1 \quad 2 \quad 2\} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{Bmatrix} = 0 \tag{d}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} \{1 \quad 2 \quad -1\} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

由以上诸例可知，含有方阵和矢量的乘积，其结果可给出如下：

（方　阵）×（方　阵）＝方　阵
（方　阵）×（列矢量）＝列矢量
（行矢量）×（方　阵）＝行矢量
（行矢量）×（列矢量）＝标　量
（列矢量）×（行矢量）＝矩　阵

本书中所处理的矩阵运算，几乎都不出这一范围。如式（c）和式（d）所示那样，行矢量和列矢量互相匹配，它们的乘积变为标量，这称为两个矢量的内积。一般情况下，两个矢量$\{u\}$，$\{v\}$的内积可用

$$Q = \{u\}^T\{v\} = \{v\}^T\{u\} \tag{5.15}$$

表示。在式（d）情况下，内积为0，这叫做两个矢量正交。

这里再重新看一下图5.1，在通常由〔A〕〔B〕=〔C〕得到的积当中，矩阵〔C〕的元素c_{ij}，可看作把〔A〕的i行作为一个矢量即行矢量，和把〔B〕的j列作为一个矢量即列矢量的内积

$$\{a_{i1}\ a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in}\}\begin{Bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{Bmatrix}=c_{ij} \tag{5.16}$$

显然由式（5.16）求内积得到的结果，和按式（5.9）定义得到的结果是相同的。

同样，某些矢量自身的内积，即

$$\{a\}^{T}\{a\}=\{a_1 a_2\cdots a_n\}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

$$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \tag{e}$$

等于其各分量的平方和，它的平方根$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$称为矢量的绝对值，或长度，或模。在二维或三维空间中考虑矢量时，式（e）中的平方根很清楚就是矢量的长度。

把式（5.13）或它的左右两边互相更换，变成了列矢量=（方阵）×（列矢量）形式的运算，这也经常被使用。目前，就有如

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

那样的式子，这可考虑为把y的n个坐标表示为x的n个坐标的线性组合。这里x_i，y_j，a_{ij}（i，$j=1$，2，$\cdots n$）分别为列矢量的分量和方阵的元素，如

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}\quad \{y\}=\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}\quad [A]=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{f}$$

或写成积的形式

$$\{y\}=[A]\{x\} \tag{5.18}$$

如按图5.1将式（f）的右边展开，便能得到和式（5.17）完全等同的关系式，但式（5.18）形式简洁，由此可知矩阵法的效用之大。

式（a）和（b），或式（c）和（5.14），只是把积的顺序更换一下，但结果完全不同。据此，有更一般的关系

$$[A][B]\neq[B][A], \tag{5.19}$$

即交换律不能成立。还有，即使$[A]$和$[B]$是匹配的，$[B]$和$[A]$也未必一定匹配，即积$[B][A]$的定义也未必能成立。

如上所述，在矩阵乘法中，积的顺序很重要，因此要把积$[A][B]$和$[B][A]$区别开来，积$[A][B]$称为用$[A]$前乘$[B]$或左乘$[B]$，积$[B][A]$称为用$[A]$后乘$[B]$或右乘$[B]$。

因此矩阵乘法的交换律不能成立，但是

$$\text{结合律：}([A][B])[C]=[A]([B][C])=[A][B][C] \tag{5.20}$$

$$\text{分配律：}[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C] \tag{5.21}$$

是成立的。作乘法运算的各个矩阵不用说必须是互相匹配的，重要的是积的顺序都不能改变。

与矩阵积有关的，还有如下关系：

$$([A][B])^T=[B]^T[A]^T \tag{5.22}$$

即，两个矩阵乘积的转置矩阵等于其各个转置矩阵的逆序乘积。这个公式容易证明，根据图5.2(a)和(b)所示的福尔克图表，便不难理解。即图(a)中的粗线表示积$[A][B]$，图(b)表示将$[A]$和$[B]$转置，以及改变顺序以后的乘积，于是粗线内的矩阵应为$[B]^T[A]^T$。现在再从图(b)的里面往外看，并假若把它当作图5.1来重新考虑，这时粗线里面的元素排列，可理解为把图(a)粗线中的矩阵转置后的结果，变成了$([A][B])^T$。因而式(5.22)的关系得到了证明。

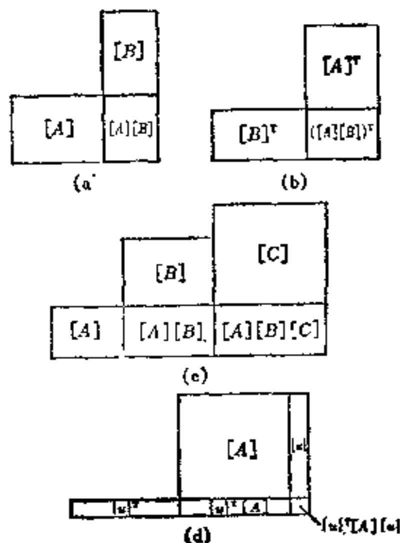


图5.2 福尔克图表的应用

下面还要讨论几个与对角矩阵乘积有关的事项。由图5.1可知，下列各式：

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1a_{11} & c_1a_{12} & c_1a_{13} \\ c_2a_{21} & c_2a_{22} & c_2a_{23} \\ c_3a_{31} & c_3a_{32} & c_3a_{33} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1a_{11} & c_2a_{12} & c_3a_{13} \\ c_1a_{21} & c_2a_{22} & c_3a_{23} \\ c_1a_{31} & c_2a_{32} & c_3a_{33} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

显然是成立的。也就是将对角矩阵前乘某方阵，相当于对矩阵中各行分别乘以对角矩阵中相应行上的主对角元素，若将某对角矩阵后乘某方阵，相当于对矩阵的各列乘以与该列对应的主对角元素。上述结论与矩阵的维数或次数无关。此外

$$
\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 \end{bmatrix}
$$

成立。即，对角矩阵彼此相乘，得到的乘积还是一个对角矩阵，其主对角元素为两相乘对角矩阵中对应主对角元素的乘积。这时，交换律

$$
[A][B]=[B][A] \tag{5.25}
$$

便能成立。此外式（5.12）给出的关系式可表示成：

【定理2】对称矩阵与对称矩阵的乘积，未必一定是对称矩阵。

5.2.3 矩阵的三重积

按照式（5.20）的结合律，逐次求得前乘或后乘的积所得到的结果，即为$[A][B][C]$那样的矩阵的三重积。这时，在各个求积阶段，当然要求矩阵必须是匹配的。设$[A]$，$[B]$，$[C]$的行数和列数分别为(m, n)，(n, p)，(p, q)，则按式（5.8）中的记号法则，便有

$$
(m, n)\times(n, p)\times(p, q)=(m, q) \tag{a}
$$

结果得到m行q列的矩阵。这一点，采用图5.2（c）所示的福尔克图表顺次搭配，便可理解。

如果将三重积$[A][B][C]$转置，参照式（5.20）和式（5.22），便有

$$
\begin{aligned}
([A][B][C])^T &= (([A][B])[C])^T \\
&=[C]^T([A][B])^T \\
&=[C]^T[B]^T[A]^T
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

其结果是将式（5.22）推广到三重积的场合，即将各矩阵分别转置并按逆序求积。对更多的矩阵作连乘，也有同样的关系式成立。

【定理3】矩阵乘积的转置矩阵等于各转置矩阵的逆乘积。

设$[A]$为对称矩阵，$[U]$为与之匹配的任一方阵，现在考虑有关三重积$[U]^T[A][U]$的性质。这类三重积，特别在振动问题中常常会出现，称之为全等变换。按照〔定理3〕和式（5.2），便有

$$
([U]^T[A][U])^T=[U]^T[A]^T[U]
$$

这里，因$[A]$为对称矩阵，便有$[A]^T=[A]$，因而上式的右边可写为$[U]^T[A][U]$，便可求得

$$
([U]^T[A][U])^T=[U]^T[A][U] \tag{5.27}
$$

因此，根据式（5.3），若$[A]$为对称矩阵，按任一方阵作全等变换后，也仍然是对称矩阵。

下面，设$\{u\}$为一列矢量

$$
\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}
$$

对其转置后，成为行矢量

$$
\{u\}^T=\{u_1\ u_2\cdots u_n\}
$$

若$[A]$为对称矩阵，例如

$$[A]=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{Bmatrix} \quad a_{ij}=a_{ji}$$

现求其三重积$\{u\}^T[A]\{u\}$，因为此时相当于在式（a）中置$m=1$，$q=1$，结果得到一个1行1列的矩阵，即为标量。这一点看一下图5.2（d）中搭配好的福尔克图表就会明白。实际求积过程为

$$\{u_1\ u_2\cdots u_n\}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

$$=\{u_1u_2\cdots u_n\}\begin{bmatrix} a_{11}u_1+a_{12}u_2+\cdots+a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{n1}u_1+a_{n2}u_2+\cdots+a_{nn}u_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}=&a_{11}u_1^2+a_{12}u_1u_2+\cdots\cdots+a_{1n}u_1u_n\\ &+a_{21}u_1u_2+a_{22}u_2^2+\cdots\cdots+a_{2n}u_2u_n\\ &\cdots\cdots\\ &+a_{n1}u_1u_2+a_{n2}u_2u_n+\cdots+a_{nn}u_n^2\end{aligned} \tag{5.28}$$

即

$$\{u\}^T[A]\{u\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_iu_j \qquad a_{ij}=a_{ij} \tag{5.29}$$

得到了一个只含u的二次项的齐次二次式。

5.2.4 逆矩阵

a．与矩阵相关的行列式

可以按照方阵中的元素排列，构造一个排列完全一样的行列式。按这种方法由方阵$[A]=[a_{ij}]$构得的行列式，可写成如

$$\det[A]=\det[a_{ij}]$$

那样。也可写成$|A|$，或$|a_{ij}|$等等。如前所述矩阵$[A]$仅仅表示元素的排列，而其本身并不是一个数值。但由此构得的行列式$\det[A]$是有数值的。当这个值不为0时，便称原来的矩阵$[A]$是正则的，当$\det[A]=0$时，$[A]$称为是奇异的。

b．伴随矩阵

从n次行列式$|a_{ij}|$中删去第i行和第j列，也即删去包含元素a_{ij}所在的行和列后所得到的（$n-1$）次行列式，称为元素a_{ij}的子行列式。进而，将此元素a_{ij}在原行列式中的位置所具有的正负号$(-1)^{i+j}$加在此子行列式前，便得到元素a_{ij}的余因子，记为A_{ij}。因此，对于方阵$[A]=[a_{ij}]$的每个元素a_{ij}，都分别有一个余因子A_{ij}与之对应。于是，在方阵$[A]=[a_{ij}]$的每个元素a_{ij}的位置上，换上余因子A_{ji}后所得到的矩阵$[A_{ji}]$，称之为方阵$[A]$的伴随矩阵。并用记号$\mathrm{adj}[A]$表示，即

$$\mathrm{adj}[A]=[A_{ji}] \tag{5.30}$$

或

$$\mathrm{adj}[A]=[A_{ij}]^{T} \tag{5.31}$$

c. 逆矩阵

对某方阵$[A]$，若有方阵$[B]$存在，能使

$$[A][B]=[I]$$

成立时，称$[B]$为$[A]$的逆矩阵，可写成

$$[B]=[A]^{-1}$$

因此便有

$$[A][[A]^{-1}=[I] \tag{5.32}$$

式中$[I]$为单位矩阵。通常，若两个数a，b之间存在关系$ab=1$时，称b为a之逆。逆矩阵这个概念也是这么来的。

下面我们要看一看在矩阵$[A]$和它的逆矩阵$[A]^{-1}$的对应元素之间存在什么样的关系。换句话说，要研究怎样从理论上来决定逆矩阵的各个元素。此刻要先求出由矩阵$[A]=[a_{ij}]$构成的行列式的值$\det[A]=D$。按照行列式的展开定理，行列式的值D等于某一行或某一列的元素乘上对应余因子的积的和。即，若令A_{ij}为元素a_{ij}的余因子，便得

按 i 行展开　$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{in}=D$　　(a)

按 j 列展开　$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots\cdots+a_{nj}A_{nj}=D$　　(b)

现在看一看，若在式（a）中将第i行的元素a_{ir}（$r=1,2\cdots n$）换成其它行的元素，例如第k行（$k\neq i$）的元素a_{kr}，同时仍保持原来第i行的余因子A_{ir}。这样便得到一个其i行和k行完全相同的行列式的展开式，根据行列式的定理，由此得到的行列式值显然为0。对于按列展开的式（b），也可得到同样的结果。因此，作为对式（a）和（b）展开定理的补充，可得如下关系式：

$i\neq k$ 的时候　$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{kn}A_{in}=0$　　(c)

$j\neq l$ 的时候　$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots\cdots+a_{nl}A_{nj}=0$　　(d)

将式（a）和（b）的左边与式（5.16）或（5.9）作一比较，可知这里都是把矩阵$[A]$的某一行作为行矢量与把$[A_{ij}]$的转置矩阵即$\mathrm{adj}[A]$的某一列作为列矢量后，取其内积的结果，也就是说这是矩阵的乘积$[A](\mathrm{adj}[A])$的元素。特别在式（a）中，当行的序号与列的序号一致时，积的主对角元素便为D，而在式（c）中，当行与列的序号不同时，表示积的非对角元素为0。同样式（b）和（d）可以表示为$(\mathrm{adj}[A])[A]$的积。因此，若将这些公式汇集在一起，便有

$$[A](\mathrm{adj}[A])=(\mathrm{adj}[A])[A]=\begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{bmatrix}=D[I]$$

成立。当$D\neq 0$，即矩阵$[A]$为正则时，有

$$[A]\frac{\mathrm{adj}[A]}{\det[A]}=\frac{\mathrm{adj}[A]}{\det[A]}[A]=[I] \tag{e}$$

因而，由式（5.32），正则矩阵$[A]$的逆矩阵可表成

$$[A]^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[A]}{\det[A]} \tag{5.33}$$

如设逆矩阵的元素为b_{ij}，则

$$b_{ij}=\frac{A_{ji}}{[A]}. \tag{5.34}$$

此外，由于式（c）成立，便知

$$[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=[I]$$

成立。即在这种情况下，积的次序是可以交换的。

若对式$[A][A]^{-1}=[I]$的两边作转置，根据式（5.22），便有$([A]^{-1})^T[A]^T=[I]$，这样可得

$$([A]^T)^{-1}=([A]^{-1})^T.$$

于是，就能直接得到如下定理：

【定理4】 转置矩阵的逆矩阵等于逆矩阵的转置矩阵。

【定理5】 对称矩阵的逆矩阵也为对称矩阵。

【定理6】 主对角元素均不为0的对角矩阵的逆矩阵是一个以这些主对角元素的倒数为相应主对角元素的对角矩阵。

即，例如有

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1/c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_3 \end{bmatrix}$$

此式是不难证明的。

【例题5.1】 求矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵。

〔解〕 $\det[A]=3-8+9-6+18-2=14$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=7, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=7, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=5$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-9, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\text{adj}[A]=\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -5 & -3 & -9 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [A]^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -5 & -3 & -9 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ -0.357 & -0.214 & -0.643 \\ -0.071 & 0.357 & 0.071 \end{bmatrix}$$

【例题5.2】 求对称矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

的逆矩阵。

〔解〕 $\det(A)=32+0+0-0-2-4=26$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\end{bmatrix}^{T}$$

$$=\begin{bmatrix}15 & -4 & 1\\ -4 & 8 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad [A]^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}15 & -4 & 1\\ -4 & 8 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

d．矩阵的除法

一般，在三个矩阵$[A]$，$[B]$，$[X]$中间，具有如

$$[A][X]=[B]$$
$$[X][A]=[B]$$

的乘法关系时，在给出$[A]$，$[B]$的情况下求$[X]$的运算，称为矩阵的除法，即乘法的逆运算。由于矩阵乘法中交换律不能成立，因此上面的两个式子一般是不同的，但只要矩阵$[A]$是正则的，就各自能有唯一的解。也即用$[A]$的逆矩阵$[A]^{-1}$去前乘第1个式子和后乘第2个式子，于是得到如

$$[X]=[A]^{-1}[B]$$
$$[X]=[B][A]^{-1}$$

的解。除非$[A]$与$[B]$能够交换，即有$[A][B]=[B][A]$，在一般情况下这两个结果是不相同的。又，既然$[A]$是正则的，自然也必定是方阵，但矩阵$[B]$和$[X]$并不必须满足这个条件，只要是匹配的就行了。

矩阵除法常常在结构力学或振动问题中出现，用得较多的是如下特殊形式，即如前面出现过的式(5.17)：

$$\left.\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots&\qquad\cdots\cdots\\ y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n\end{aligned}\right\}\tag{5.35}$$

或

$$\{y\}=[A]\{x\}\tag{5.36}$$

现在的情况是，在左侧的$\{y\}$和系数$[a_{ij}]$给定时，对未知数$\{x\}$求解方程组。式(5.35)是一组关于x的n元1次联立方程式，它的解

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots\cdots b_{1n}y_n \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots\cdots b_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots\cdots b_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

同样也可表示成y的线性组合式。若将式(f)的系数b_{ij}表成

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

则式(f)便变为

$$\{x\} = [B]\{y\} \qquad (5.37)$$

现在若设矩阵$[A]$是正则的，则按照前面所讲的，它的逆矩阵$[A]^{-1}$也同样是正则的，如对式(5.36)前乘$[A]^{-1}$，便得

$$[A]^{-1}\{y\} = \{x\}$$

将此式与式(5.37)比较，显然有

$$[B] = [A]^{-1}$$

成立。因此，这是将式(5.35)倒过来，变成了根据y去求解x的问题。

5.2.5 分块矩阵

用竖线或横线，或同时用竖横两种线把任意一个矩阵，例如

$$\{a_{11} \mid a_{12}\ a_{13}\} \qquad \left\{\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \hline a_{31} \\ a_{41} \end{array}\right\} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$$

那样分隔开来，分成许多小的块区。这类被分隔出来的各个块区称为原矩阵的子矩阵，由这些隔开的子矩阵所组成的矩阵称为块矩阵。对块矩阵来说，各个子矩阵都被分别看作是一个元素，这样，迄今为止我们所讲过的各种矩阵运算，都仍然适用。

块区的划分方法，可根据各种应用目的而有所不同，如有时为了计算简便，有时为了使计算的意义更加明确等等。但是不管在什么情况下都必须把子矩阵看作矩阵的元素来进行运算。当然，经常可能出现的情况是必须把子矩阵划分成匹配的形式。从下面给出的几个算例可见，按块矩阵计算的所有结果，和在5.2.2节中由直接计算得到的结果是一致的：

$$\{1\ \ 2\ \ -1\}\left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline -2 & -3 & 1 \end{array}\right] = 1\times\{3\ \ 2\ \ -3\} + 2\times\{1\ \ 1\ \ 2\} + (-1)\times\{-2\ \ -3\ \ 1\}$$

$$= \{3\ \ 2\ \ -3\} + \{2\ \ 2\ \ 4\} + \{2\ \ 3\ \ -1\}$$

$$= \{7\ \ 7\ \ 0\}$$

$$
\left[\begin{array}{r|r|r} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}\times 3+\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix}\times(-2)+\begin{Bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\times 1
$$

$$
=\begin{Bmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{rr} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\{1 \quad 2\} \\ \\ (1 \quad 2)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}+(2)(1 \quad 2) \end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ (16 \quad 8)+(2 \quad 4) \end{array}\right]=\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 3 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}
$$

试看将m行n列的矩阵$[A]$和n行p列的矩阵$[B]$按如下方式分块：

$$
[A]=\left\{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{array}\right\} \quad [B]=\left\{\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{array}\right\}
$$

这样的分割方法就相当于把矩阵$[A]$看作是由n维行矢量为元素构成的m维列矢量，把矩阵$[B]$看作是由n维列矢量构成的p维行矢量，于是按这种理解去求积$[A][B]=[C]$，矩阵$[C]$的元素c_{ij}便可理解为由按式(5.16)表示的行矢量和列矢量之内积给出。

5.2.6 复矩阵

到现在为止，矩阵的所有元素都默认为是实数的。所有元素均明确限定是实数的矩阵称作实矩阵。与之对应的，元素为复数或复变量的矩阵称作复矩阵。只有一列的复矩阵称为复矢量。迄今已讲述过的有关实数运算的各种关系式和各种定理均可简单地变为复数运算，而且对复矩阵全部成立，在实质上不需作任何特别的变化。但是下面将会提到，由于引入了复矩阵的概念，自然有必要给出一些新的定义。

设复矩阵$[C]$的元素为$c_{ij}=a_{ij}+ib_{ij}$（a_{ij}，b_{ij}为实数），且假设a_{ij}和b_{ij}分别为实矩阵$[A]$和$[B]$的元素，则按式(5.7)和(5.5)便有

$$
[C]=[A]+i[B] \tag{a}
$$

此外，若以某复矩阵$[C]=[a_{ij}+ib_{ij}]$的元素的共轭复数为元素的矩阵，称为$[C]$的共轭矩阵，写成

$$
[C^*]=[a_{ij}-ib_{ij}]
$$

因此，复矢量

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} v_1+\mathrm{i}w_1 \\ v_2+\mathrm{i}w_2 \\ \vdots \\ v_n+\mathrm{i}w_n \end{Bmatrix}=\{v\}+\mathrm{i}\{w\} \qquad (\{v\},\ \{w\}\text{为实矢量})$$

的共轭矢量为：

$$\{u^*\}=\begin{Bmatrix} v_1-\mathrm{i}w_1 \\ v_2-\mathrm{i}w_2 \\ \vdots \\ v_n-\mathrm{i}w_n \end{Bmatrix}=\{v\}-\mathrm{i}\{w\}$$

另外，如

$$\begin{bmatrix} 3 & 4+\mathrm{i} & 9-2\mathrm{i} \\ 4-\mathrm{i} & 2 & 8+3\mathrm{i} \\ 9+2\mathrm{i} & 8-3\mathrm{i} & 6 \end{bmatrix}$$

这一类矩阵，元素c_{ij}与其主对角线对称位置上的元素c_{ji}互为共轭数时的复方阵叫作埃尔米特矩阵。埃尔米特矩阵中各元素的实部是关于主对角线对称的，其虚部是反对称的，位于主对角线上的主对角元素为实数。对于这类矩阵，它的式(a)可表示为

$$[A]^{\mathrm{T}}=[A]: \quad \text{对称矩阵}$$

$$[B]^{\mathrm{T}}=-[B]: \text{反对称矩阵},$$

显然，有关系式$[C^*]^{\mathrm{T}}=[C]$成立。

5.3 二 次 式

只包含任意个实变量u_1，$u_2\cdots u_n$的二次项的和的式子，也即二次齐次式，称为这些变量的二次式，在一般情况下，以a_{ij} (i，$j=1$，$2\cdots n$) 表示二次式的系数，则该二次式可用

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_iu_j \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

来表示。

若用n次矢量表示变量u_1，$u_2\cdots u_n$，用n次对称方阵$[A]=[a_{ij}]$表示系数a_{ij}，上面的二次式便可表示为

$$Q=\{u_1\ \ u_2\cdots u_n\}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

$$=\{u\}^{\mathrm{T}}[A]\{u\}$$

这个式子在式(5.28)和(5.29)中已给出过。这时可称$[A]$为二次式矩阵，若$[A]$一旦给定，变量u_1，$u_2\cdots u_n$的二次式便可唯一地决定。因为$\{u\}^{\mathrm{T}}[A]\{u\}$是三重积，所以也是一个标量，这在5.2.3节中已经讲过。若$[A]$为对角矩阵，则

$$Q=\{u\}^{\mathrm{T}}[A]\{u\}=a_{11}u_1^2+a_{22}u_2^2+\cdots+a_{nn}u_n^2, \tag{5.39}$$

得到的式子是一个只包含变量平方项的二次式，称之为正则二次形。

二次式Q的值一般可为正、零或负的。但若二次式只有在变量u_i（$i=1$，$2\cdots n$）全为0时才等于0，且通常只为正值而决不等于负值时称为是正定的。当二次式为正定时的矩阵，即$Q=\{u\}^T[A]\{u\}$为正定时的矩阵$[A]$，也称为是正定的。最简单的一个例子是，当式(5.39)中的系数a_{ii}（$i=1$，$2\cdots n$）全部为正时，由此式给出的二次式Q即为正定的，因此，$[A]=[a_{ii}]$显然也是正定的。

【定理7】 主对角元素均为正的对角矩阵是正定的。

若正定的矩阵$[A]$为奇异时，即当$\det[A]=0$时，则众所周知，一次齐次联立方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}u_1+a_{12}u_2+\cdots+a_{1n}u_n=0 \\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{2n}u_n=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}u_1+a_{n2}u_2+\cdots+a_{nn}u_n=0 \end{array}\right\}$$

即$[A]\{u\}=\{0\}$具有$\{u\}\neq\{0\}$的解。但对于这样的解$\{u\}$，却使$Q=\{u\}^T[A]\{u\}=0$，这是与正定的定义即只有当$\{u\}=0$时才有$Q=0$相矛盾的。因此，得到下面的定理：

【定理8】 正定的矩阵是正则的。

将二次式推广到复矩阵情形，便变成

$$H=\{u^*\}^T[C]\{u\} \tag{5.40}$$

形式的所谓埃尔米特形。这里，$[C]$为埃尔米特矩阵，$\{u\}$为复矢量，$\{u^*\}$为它的共轭矢量。埃尔米特形的二次式同样也是标量。现在令$[C]=[A]+i[B]$，$\{u\}=\{v\}+i\{w\}$，来实际求一下式(5.40)的三重积，便得

$$\begin{aligned}\{u^*\}^T[C]\{u\}&=(\{v\}^T-i\{w\}^T)([A]+i[B])(\{v\}+i\{w\})\\ &=\{v\}^T[A]\{v\}+\{w\}^T[A]\{w\}+\{w\}^T[B]\{v\}-\{v\}^T[B]\{w\}\\ &+i(\{v\}^T[A]\{w\}-\{w\}^T[A]\{v\}+\{v\}^T[B]\{v\}+\{w\}^T[B]\{w\})\end{aligned} \tag{a}$$

考虑式(5.38)给出的埃尔米特矩阵的关系式，并根据式(5.26)可知存在$\{v\}^T[A]\{w\}=(\{w\}^T A\{v\})^T$。因为$(\{w\}^T[A]\{v\})$是对标量转置后的结果，仍然是这个标量本身，因此可得$\{v\}^T[A]\{w\}=\{w\}^T[A]\{v\}$。同样地，可得$\{v\}^T[B]\{v\}=-(\{v\}^T[B]\{v\})^T$和$\{w\}^T[B]\{w\}=-(\{w\}^T[B]\{w\})^T$，它们也同样都是对标量的转置，但由于它们之间差一个符号，所以这些标量也就必须等于0。于是有$\{v\}^T[B]\{v\}=\{w\}^T[B]\{w\}=0$。因而式(a)中的虚部等于0，得到下面的定理：

【定理9】 埃尔米特形表示一个实数值。

实对称矩阵只不过是埃尔米特矩阵中虚部为0的情况。因此这个定理对于由实对称矩阵和复矢量构成的埃尔米特形，当然也是成立的。

5.4 矩阵的微分

当矩阵$[A]$的元素a_{ij}为某个变量例如t的函数时，则以各元素对于t的微分$da_{ij}(t)/dt$为元素的矩阵，定义为原矩阵$[A]$的微分，写成$d[A]/dt$。即

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}a_{n1}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{n2}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{nn}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

例如，令 x 为变量，则

$$[A(x)]=\begin{bmatrix} 1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2} & \frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2} \\ \frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2} & \frac{x^2}{a^2} \end{bmatrix}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} -2+2\left(\frac{x}{a}\right) & 1-2\left(\frac{x}{a}\right) \\ 1-2\left(\frac{x}{a}\right) & 2\left(\frac{x}{a}\right) \end{bmatrix}$$

同样，也可以定义积分为

$$\int [A]\mathrm{d}t=\left[\int a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right]$$

例如，对上式中的$[A(x)]$的定积分为

$$\int_0^a [A]\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} \int_0^a\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x & \int_0^a\left(\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x \\ \int_0^a\left(\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x & \int_0^a\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x \end{bmatrix}$$

$$=\frac{a}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

下面，假设某标量Q为任意个变量u_1，$u_2\cdots u_n$的函数。此时，若将Q依次对这些变量的偏导数排列成如下列矢量：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial u_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial u_n} \end{Bmatrix}=\frac{\partial Q}{\partial\{u\}}$$

并用$\partial Q/\partial\{u\}$表示，则称之为函数Q对矢量

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

的矢量微分。换言之，$\partial/\partial\{u\}$，即

$$\partial/\partial\{u\}=\begin{Bmatrix}\partial/\partial u_1\\ \partial/\partial u_2\\ \vdots\\ \partial/\partial u_n\end{Bmatrix} \tag{5.41}$$

为偏微分运算子矢量。现考虑$\{u\}$和另一独立矢量

$$\{v\}=\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{Bmatrix}$$

并设Q为矢量$\{u\}$与$\{v\}$的内积。根据式(5.15)可知，有$Q=\{u\}^T\{v\}=\{v\}^T\{u\}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$，故得$\partial Q/\partial u_i=v_i$ $(i=1,\ 2\cdots n)$，即

$$\frac{\partial(\{u\}^T\{v\})}{\partial\{u\}}=\frac{\partial(\{v\}^T\{u\})}{\partial\{u\}}=\{v\} \tag{5.42}$$

下面考虑对由$Q=\{u\}^T[A]\{u\}$变成的二次式的矢量微分。此处不必限制矩阵$[A]$是对称的。按式(5.28)

$$\begin{aligned}Q=&a_{11}u_1^2+a_{12}u_1u_2+\cdots+a_{1n}u_1u_n\\ &+a_{21}u_1u_2+a_{22}u_2^2+\cdots+a_{2n}u_2u_n\\ &\cdots\cdots\\ &+a_{n1}u_1u_n+a_{n2}u_2u_n+\cdots+a_{nn}u_n^2\end{aligned}$$

并顺次对u_1，$u_2\cdots u_n$求偏微分，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial u_1}&=(a_{11}u_1+a_{12}u_2+\cdots+a_{1n}u_n)+(a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{n1}u_n)\\ \frac{\partial Q}{\partial u_2}&=(a_{21}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{2n}u_n)+(a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{n2}u_n)\\ &\cdots\cdots\\ \frac{\partial Q}{\partial u_n}&=(a_{n1}u_1+a_{n2}u_2+\cdots+a_{nn}u_n)+(a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\cdots+a_{nn}u_n),\end{aligned}$$

若将它们集中起来，便知会有

$$\frac{\partial(\{u\}^T[A]\{u\})}{\partial\{u\}}=[A]\{u\}+[A]^T\{u\}=([A]+[A]^T)\{u\}$$

现在令$[B]=[A]+[A]^T$，此式便变为

$$\frac{\partial(\{u\}^T[A]\{u\})}{\partial\{u\}}=[B]\{u\} \tag{5.43}$$

于是对作为标量的二次形$Q=\{u\}^T[A]\{u\}$求矢量微分的结果相当于矩阵和矢量的积，也就是相当于一个列矢量。根据定理1，此处的矩阵$[B]$通常是对称的。但必需注意，这里原来的二次形矩阵$[A]$不是对称的，而按式(5.43)的矢量微分得到的矩阵$[B]$通常是对称的。

在二次形的矩阵$[A]$本来就是对称的情况时，由式(5.3)知$[B]=2[A]$，因而式(5.43)便有如下形式：

$$\frac{\partial(\{u\}^T[A]\{u\})}{\partial\{u\}}=2[A]\{u\} \tag{5.44}$$

5.5 固有值问题

在式(4.7)中求两质点的无阻尼固有圆频率值时，令$p^2=-\lambda$，则有

$$\left.\begin{aligned}K_{11}u_1+K_{12}u_2=\lambda m_1u_1\\K_{21}u_1+K_{22}u_2=\lambda m_2u_2\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

若进一步设

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}=[A]\qquad\begin{bmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{bmatrix}=[B]\qquad\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\{u\}$$

便可表示成$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$那样的矩阵形式。若将式(a)进一步扩大，使u成为多变量u_1，$u_2\cdots u_n$，便可得到

$$\left.\begin{aligned}K_{11}u_1+K_{12}u_2+\cdots+K_{1n}u_n=\lambda m_1u_1\\K_{21}u_1+K_{22}u_2+\cdots+K_{2n}u_n=\lambda m_2u_2\\\cdots\cdots\\K_{n1}u_1+K_{n2}u_2+\cdots+K_{nn}u_n=\lambda m_nu_n\end{aligned}\right\}$$

仍然设

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n}\\K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn}\end{bmatrix}=[A]\qquad\begin{bmatrix}m_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & m_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \vdots & m_n\end{bmatrix}=[B]\qquad\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{Bmatrix}=\{u\}$$

便能得到

$$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}\qquad(5.45)$$

两质点系的无阻尼振动问题，归根到底是寻求满足式(a)的频率值$\omega=\sqrt{\lambda}$和振型u_1，u_2。一般情况下，不用规定式(5.45)中的$[B]$为对角矩阵。在考虑更一般的方阵时，寻求满足这个式子的λ和$\{u\}$的问题称为固有值问题。称形如式(5.45)那样的式子为固有值问题方程式。

5.5.1 固有值与固有矢量

a．固有值问题方程式的解

在式(5.45)给出的固有值问题方程式中，当全部元素均由实的n次方阵$[A]$和$[B]$给出时，问题就成为决定满足此式的标量λ与矢量$\{u\}$，在最一般的情况下处理这样的问题是很困难的。这里采用两个假定：

(i) $[A]$与$[B]$均是对称矩阵；

(ii) 矩阵$[B]$是正定的。

这样问题得到了简化，解的性质也变得容易理解。在后面振动系统的固有值问题中，满足这个假定是毫无问题的。

若设$[B]$为正定的，按定理8 $[B]$便为正则的，因此逆矩阵$[B]^{-1}$必然存在。将它前乘式(5.45)，便得到$[B]^{-1}[A]\{u\}=\lambda\{u\}$，若令$[B]^{-1}[A]=[C]$，则式(5.45)便可表示成

$$[C]\{u\}=\lambda\{u\}\qquad(5.46)$$

根据定理5，$[B]^{-1}$是对称的，虽然$[A]$也是对称的，但由定理2，$[C]=[B]^{-1}[A]$就未必是对称的，这一点必须注意。

式(5.45)可以写成

$$([A]-\lambda[B])\{u\}=0 \tag{5.47}$$

式中若$[A]=[a_{ij}]$，$[B]=[b_{ij}]$，则便等同为1次齐次联立方程式：

$$\left.\begin{aligned}&(a_{11}-\lambda b_{11})u_1+(a_{12}-\lambda b_{12})u_2+\cdots+(a_{1n}-\lambda b_{1n})u_n=0\\&(a_{21}-\lambda b_{21})u_1+(a_{22}-\lambda b_{22})u_2+\cdots+(a_{2n}-\lambda b_{2n})u_n=0\\&\cdots\cdots\\&(a_{n1}-\lambda b_{n1})u_1+(a_{n2}-\lambda b_{n2})u_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda b_{nn})u_n=0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

通常规定$\{u\}=\{0\}$为无意义的解或平凡解。众所周知，为使$\{u\}\neq\{0\}$，即式(5.45)或式(a)存在有意义的解或非平凡解时，须令

$$\det([A]-\lambda[B])=0 \tag{5.48}$$

即须限定

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}-\lambda b_{1n}\\a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}-\lambda b_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1}-\lambda b_{n1} & a_{n2}-\lambda b_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}-\lambda b_{nn}\end{vmatrix}=0 \tag{b}$$

若将式(5.48)或式(b)的左边展开为关于λ的n次多项式，便能得到所谓的固有多项式。使固有多项式等于0的式(5.48)或式(b)，是一个关于λ的n次代数方程式，称为固有方程式或特征方程式。固有方程式具有和矩阵$[A]$和$[B]$次数相等的n个根$\lambda^{(j)}$ $(j=1, 2\cdots n)$，这些根叫做固有值问题方程式(5.45)的固有值。固有值通常互不相等，即可认为固有方程式是没有重根的。下面就在这一假定下作进一步讨论。

固有值一旦确定，将它们代入式(a)便能得到关于u_1，$u_2\cdots u_n$的n元1次齐次联立方程式。求解此联立方程式可得到与各固有值对应的固有函数u_i $(i=1, 2\cdots n)$或满足方程式(5.45)的矢量$\{u\}$。这样求得的矢量称为固有矢量或模态（振型）矢量，因为固有值有n个，所以固有矢量也有n个，可把这些矢量记作$\{u^{(j)}\}$ $(j=1, 2\cdots n)$。固有矢量是互相线性独立的。

但是因为式(a)中的右边全等于0，是一个齐次方程式，因此无法确定固有矢量$\{u^{(j)}\}$各分量的绝对值，而只能决定各分量之间的比率$u_1^{(j)}:u_2^{(j)}:\cdots:u_n^{(j)}$。如要想确定它们的绝对值，还必须给出其它条件。

b. 固有值的实正数性

在前面讲到的决定固有值的过程中，对于任意一个固有值λ，都假定有一个固有矢量与之对应，并且满足式(5.45)，即$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$。现在考虑$\{u\}$为复矢量的情形，对此式的两边前乘$\{u^*\}^T$，得到$\{u^*\}^T[A]\{u\}=\lambda\{u^*\}^T[B]\{u\}$，因而

$$\lambda=\frac{\{u^*\}^T[A]\{u\}}{\{u^*\}^T[B]\{u\}}. \tag{c}$$

根据前面的假定(i)，因为$[A]$、$[B]$都是对称矩阵，所以该式的分母和分子也都是埃尔米

特形的，由定理9都可表示成实数。因此固有值λ为实数。

若λ是实数，式(a)中的系数便全部为实数，对此求解u_i（$i=1, 2\cdots n$）的过程也都是实数运算，它们的解（即固有矢量）也全都是实矢量。因此式(c)可以表示成二次式的商：$\lambda=\{u\}^T[A]\{u\}/(\{u\}^T[B]\{u\})$。

按照假定(ii)，因为二次式$\{u\}^T[B]\{u\}$是正定的，分母通常为正，倘若矩阵$[A]$也是正定的，分子值也就为正，则固有值λ也是正的。将上述结果归纳起来，得到下面的定理。

【定理10】 在方程式$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$中，若$[A]$和$[B]$是对称矩阵，且$[B]$又是正定的，则固有值和固有矢量全是实数；若$[A]$也是正定的，则固有值全都为正。

c．模态（振型）矩阵和谱矩阵

当固有值问题方程式中的矩阵$[A]$、$[B]$为n次方阵时，如前所述，可以决定n个固有值和与之对应的n个n维矢量。通常按固有值的大小顺序依次排列成

$$\lambda^{(1)}<\lambda^{(2)}<\lambda^{(3)}\cdots<\lambda^{(n)}$$

并给以序号。这样得到的顺序号叫做固有值的模态阶数（振型阶数）或者简单地称作阶数。与固有值的阶数相对应的固有矢量

$$\{u^{(j)}\}=\begin{Bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ \vdots \\ u_n^{(j)} \end{Bmatrix} \qquad j=1,\ 2\cdots n$$

也给以相应的阶数。

把各固有矢量从第1阶到第n阶分别如

$$[U]=\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

那样，配置在方阵的第1列到第n列，所得的方阵称为固有值问题方程式(5.45)的模态（振型）矩阵。因为固有矢量是线性独立的，故模态矩阵应为正则的。此外，把固有值从第1阶到第n阶如

$$[\Lambda]\cdots\begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{(n)} \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

那样作为主对角元素所构成的对角矩阵，称为固有值问题方程式(5.45)的谱矩阵。

任意一个固有值$\lambda^{(j)}$和与之对应的固有矢量$\{u^{(j)}\}$都须满足固有值问题方程式(5.45)，因此便有以下关系：

$$[A]\{u^{(j)}\}=\lambda^{(j)}[B]\{u^{(j)}\} \quad j=1,\ 2\cdots n \tag{5.51}$$

在应用由式(5.49)和式(5.50)定义的模态（振型）矩阵和谱矩阵时，可以把这些关系式归纳在一起，简洁地表示为

$$[A][U]=[B][U][\Lambda] \tag{5.52}$$

在式中后乘一个对角矩阵$[\Lambda]$，其意义只要看一看式(5.24)就会明白。

5.5.2 固有矢量的正交性

$\lambda^{(r)}$和$\lambda^{(s)}$是两个不同的固有值，$\{u^{(r)}\}$和$\{u^{(s)}\}$为分别与之对应的固有矢量，因为它们都应满足式(5.45)，即

$$\left.\begin{aligned}[A]\{u^{(r)}\}=\lambda^{(r)}[B]\{u^{(r)}\}\\ [A]\{u^{(s)}\}=\lambda^{(s)}[B]\{u^{(s)}\}\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

首先将第1个式转置，然后后乘$\{u^{(s)}\}$，便有

$$([A]\{u^{(r)}\})^{T}\{u^{(s)}\}=\lambda^{(r)}([B]\{u^{(r)}\})^{T}\{u^{(s)}\},$$

参照式(5.22)，并注意$[A]$、$[B]$为对称矩阵，便得

$$\{u^{(r)}\}^{T}[A]\{u^{(s)}\}=\lambda^{(r)}\{u^{(r)}\}^{T}[B]\{u^{(s)}\} \qquad (b)$$

接着，对式(a)中的第2式前乘$\{u^{(r)}\}^{T}$，变成

$$\{u^{(r)}\}^{T}[A]\{u^{(s)}\}=\lambda^{(s)}\{u^{(r)}\}^{T}[B]\{u^{(s)}\} \qquad (c)$$

现求式(b)和式(c)之差，得

$$(\lambda^{(r)}-\lambda^{(s)})\{u^{(r)}\}^{T}[B]\{u^{(s)}\}=0$$

然而由于$\lambda^{(r)}-\lambda^{(s)}\neq 0$，便得

$$\{u^{(r)}\}^{T}[B]\{u^{(s)}\}=0 \quad r\neq s \qquad (5.53)$$

式(5.15)曾经提到，在通常意义下两个矢量的正交条件为它们的内积等于0，即

$$\{u^{(r)}\}^{T}\{u^{(s)}\}=0 \qquad (d)$$

与此对应的式(5.53)变为将矩阵$[B]$介于中间的三重积，为此称为矢量$\{u^{(r)}\}$与$\{u^{(s)}\}$通过矩阵$[B]$的正交。式(d)是$[B]$为单位矩阵，即$[B]=[I]$时的一个特例。再者，由式(5.53)，并根据式(b)或式(c)，可得

$$\{u^{(r)}\}^{T}[A]\{u^{(s)}\}=0 \qquad r\neq s \qquad (5.54)$$

即可理解为两个固有矢量也是通过矩阵$[A]$正交的。归纳以上所述，可得如下的关于固有矢量的正交性定理。

【定理11】 与方程式$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$的任意两个不等固有值对应的固有矢量是通过矩阵$[A]$和$[B]$正交的。

但是，如假设$[B]$为正定的，且$[A]$也为非奇异的，则有

$$\{u^{(r)}\}^{T}[A]\{u^{(s)}\}\neq 0,\ \{u^{(r)}\}^{T}[B]\{u^{(s)}\}\neq 0 \quad r=s \qquad (5.55)$$

下面考虑关于模态矩阵$[U]$的三重积$[U]^{T}[A][U]$，用图5.3所示的福尔克图表来描绘，不难理解方阵$[U]^{T}[A][U]$的第i行第j列元素为$\{u^{(i)}\}^{T}[A]\{u^{(j)}\}$。按式(5.54)，当$i\neq j$时非对角元素均为0；按式(5.55)，只有$i=j$时主对角元素才被保留。因此，由$[U]^{T}[A][U]$得到的积为一对角矩阵。此外，对于$[U]^{T}[B][U]$也能得到同样的结果：

图5.3 福尔克图表中的$[U]^{T}[A][U]$

$$\left.\begin{aligned}[U]^{T}[A][U]=\left[\{u^{(j)}\}^{T}[A]\{u^{(j)}\}\right]\\ [U]^{T}[B][U]=\left[\{u^{(j)}\}^{T}[B]\{u^{(j)}\}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (5.56)$$

【定理12】 若$[U]$为方程式$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$的模态矩阵，则矩阵$[A]$和$[B]$可同时由$[U]^T[A][U]$，$[U]^T[B][U]$对角化。

5.5.3 按固有矢量展开

设$\{u^{(j)}\}$ ($j=1, 2\cdots n$) 为解固有值问题方程式$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$时得到的n个固有矢量，则任意n维矢量$\{x\}$能被表示为这些固有矢量的线性组合式，如

$$\{x\}=\{u^{(1)}\}q^{(1)}+\{u^{(2)}\}q^{(2)}+\cdots+\{u^{(n)}\}q^{(n)}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\{u^{(j)}\}q^{(j)} \tag{a}$$

换言之，任意矢量有可能按固有矢量展开，这里称式(a)中的系数$q^{(1)}$，$q^{(2)}\cdots q^{(n)}$为模态乘子。

考虑由模态乘子构成的矢量

$$\{q\}=\begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{Bmatrix}$$

并设$[U]$为模态矩阵，则可把式(a)表示成

$$\{x\}=[U]\{q\} \tag{5.57}$$

若将$\{x\}$和$\{q\}$的各分量分别看作表示n维空间的坐标，则式(5.57)便意味着在两个坐标系之间的坐标变换，模态矩阵$[U]$便成为它们之间的变换矩阵。

若式(5.57)左边的矢量$\{x\}$为已知的，则模态乘子$q^{(1)}$，$q^{(2)}\cdots q^{(n)}$可以采用基于固有矢量正交性的定理12来确定。即若在式(5.57)的两边前乘$[U]^T[B]$，便可得到

$$[U]^T[B]\{x\}=[U]^T[B][U]\{q\} \tag{b}$$

由定理12，$[U]^T[B][U]$是对角矩阵，根据式(5.55)它的主对角元素不为0。因此对角矩阵$[U]^T[B][U]$是正则的，由式(b)可得

$$\{q\}=([U]^T[B][U])^{-1}[U]^T[B]\{x\} \tag{5.58}$$

于是各模态乘子可表示为

$$q^{(j)}=\frac{\{u^{(j)}\}^T[B]\{x\}}{\{u^{(j)}\}^T[B]\{u^{(j)}\}} \qquad j=1, 2\cdots n \tag{5.59}$$

第六章　多质点系统的振动

6.1　建筑物的模型化

6.1.1　质量的集中化

建筑结构物是由梁、柱、楼板、墙壁、基础等构件组成的，各构件都有与其各自材料、尺寸相对应的重量。这些重量统称为呆荷重。此外，在建筑物里还要承受人、家具、器具、设备等重量，这些附加的重量称为活荷重。在活荷重中，除了设备以外的其它重量均会有随时间而变化的移动和集散。众所周知，在进行抗震设计时，只是粗略地将平时荷重的平均值作为计算地震力用的重量。

建筑物的重量是由呆荷重和活荷重加在一起计算的，并且按建筑物的形状和用途分布在建筑物的各个部分。图6.1对当今具有代表性的几种建筑物，给出了它们的单位面积重量沿其高度的分布情况。从这个图上可以清楚地看出，不管建筑物的构造形式如何，建筑物的重量明显地集中在各个楼板层上。从这实际情况出发，在确定建筑物的动力分析模型时，就有充分的理由把二分之一层高范围内的全部重量集中到各自相应的楼板层上，即可采用所谓的集中质量系或质点系的模型。与其它构筑物和机械系统相比，一般来说，还没有看到过有象建筑物动力分析这样的极为简明的模型。

要不要将沿高度分布的集中在楼板层处的质量进一步考虑在平面内进行分配和集中，这要视分析的目的和要求的精度以及建筑物的力学特性而定。若要将某一楼板层上的质量分成更细的集中质量，有一种方法就是如图6.2(a)所示，把图中以二分之一跨度为分界线的阴影范围内的质量集中到柱头部，即框架的节点上。按这种方法，建筑物的质量将被集中到如图6.2(b)所示的质点上去。

采用这种将楼板的质量集中到节点上的方法，对考虑建筑物的水平振动或者近似水平方向的振动是妥当的。但是在把竖向振动作为研究对象时，因为要把如图6.2(c)所示那样用梁围起来的楼板及其上面的活荷重的局部振动考虑成为主要的振动，因此上面所讲的那种集中化方法便不合理了。

图6.2(b)是形状规正的建筑物例子，当建筑物的形状不规正或形状特殊，或者重量分布明显不均匀时，必须根据各种实际状况考虑适当的集中化方法。

6.1.2　自由度

图6.3(a)采用图1.1(a)所示的与地表固定的右手坐标系来表示置于该坐标系中的一个质点。这个质点能沿x，y，z三个正交的坐标轴方向作狭义的位移，即平移运动，并用x，y，z分别表示质点重心的平移量。并规定按图中x，y，z坐标轴正向为正。此外，这个质点还能绕x，y，z三轴进行旋转。其旋转角分别用$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$表示，图中箭头表示旋转方向，并规定按右手螺旋法则，沿坐标轴正方向前进为正。这样，便把平移和旋转一起总称为广义位移。

(a) 五层钢筋混凝土墙结构公寓

(b) 七层钢筋混凝土框架结构公寓

(c) 七层(地下一层)钢结构办公楼建筑

(d) 十一层(地下一层)劲性钢筋混凝土办公楼建筑

图6.1 建筑物重量沿高度的分布

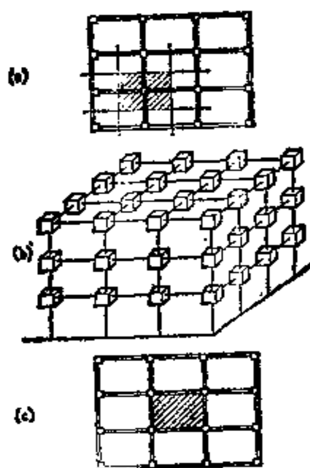


图6.2 质量的集中化

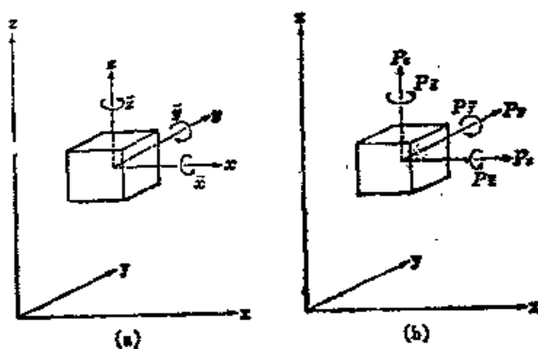


图6.3 质点的自由度

上述的x，y，z，$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$中的任意一个都可以通过预先约束使别的位移不发生而分别任意给定，所以它们是互相独立的。而且，给定了这6个位移量，质点的状态便被完全决定，反之质点的任何状态也都能够分解成这6个位移来表示。这种互相独立的可能运动方向的数目，换言之，为了完整地表示状态所必需的位移数称为自由度。因此，一般一个质点的自由度为6。因而由n个质点组成的系统，它的自由度一般为$6n$。

对由n个质点组成的质点系中的各质点，分别从1到n给以适当的编号，便可用x_i，y_i，z_i，$\bar{x}_i$，$\bar{y}_i$，$\bar{z}_i$表示第i个质点的位移，将它们写成列矢量形式为

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{Bmatrix}, \tag{6.1}$$

称$\{\delta_i\}$为质点i的位移矢量。而且若令各质点的位移矢量为子矩阵，则可用$6n$维列矢量来表

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_n\} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_1 \\ \hline x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_n \\ y_n \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{Bmatrix} \tag{6.2}$$

示全部质点的位移，称作质点系的位移矢量。

和图6.3(a)给出的6个位移相对应，从外部作用于质点的任意力和力矩，可采用如图(b)所给出的6个分量来表示。图中P_x，P_y，P_z为作用在质点重心上的沿x，y，z轴方向的力，$P_{\bar{x}}$，$P_{\bar{y}}$，$P_{\bar{z}}$分别为在三个旋转轴方向上的作用力矩。力和力矩总称为广义力，与图(a)中的位移情况一样，把沿图中箭头方向的作用定为正。将作用在质点i上的力表示成6维列矢量

$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \\ P_{\bar{x}i} \\ P_{\bar{y}i} \\ P_{\bar{z}i} \end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

并称为作用于质点的力矢量，而且用$6n$维列矢量来表示作用于质点系的力矢量。作用于质点系

中各质点的力，除有从系统外部作用的外力外，还有因系统内部其它质点的位移或速度引起的内力，表示动态作用的外力矢量叫做激振矢量 。

$$\{P\}=\begin{Bmatrix}\{P_1\}\\ \{P_2\}\\ \vdots\\ \{P_n\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_{x1}\\ P_{y1}\\ \vdots\\ P_{\bar{z}1}\\ \hline P_{x2}\\ P_{y2}\\ \vdots\\ P_{\bar{z}2}\\ \hline \vdots\\ \hline P_{xn}\\ P_{yn}\\ \vdots\\ P_{\bar{z}n}\end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

6.1.3 质量矩阵

令m_i为任意质点 i 的质量，对于 x ， y ， z 任一方向的运动，它都是不变的，但是为了与自由度相对应，这里分别用m_{xi}，m_{yi}，m_{zi}来表示。实际上当然有$m_{xi}=m_{yi}=m_{zi}=m_i$。

此外，质点还有其重心对旋转轴 x ， y ， z 的惯性矩，一般即使同一质点，其惯性矩也随轴的方向而异。如所周知，相对于把质量与加速度之积表示成力，可把惯性矩与角加速度之积表示成力矩。于是惯性矩也可理解为一种广义质量，质点 i 对旋转轴 x ， y ， z 的惯性矩可分别写成$m_{\bar{x}i}$，$m_{\bar{y}i}$，$m_{\bar{z}i}$。

这些广义质量可表示成 6 阶对角矩阵的形式

$$[M_i]=\begin{bmatrix}m_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_{zi} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_{\bar{x}i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\bar{y}i} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\bar{z}i}\end{bmatrix}$$

并称之为质点i的质量子矩阵。

进而，若质点系由 n 个质点组成，则将各点的$[M]$作为第 i 个主对角元素所得到的$6n$阶对角矩阵称为质点系的质量矩阵，形式如下：

$$[M]=\begin{bmatrix}[M_1] & [0] & \cdots & [0]\\ [0] & [M_2] & \cdots & [0]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [0] & [0] & \cdots\cdots & [M_n]\end{bmatrix} \tag{6.5}$$

在式 (6.5)给出的对角矩阵中，因为它的主对角元素都代表质量，自然都是正的。由定理 7 可知，质量矩阵是正定的。设任意质点 i 沿 x ，y ，z ，$\bar{x}$ ，$\bar{y}$， $\bar{z}$ 方向的速度（含角速度

在内的广义速度）分别为$\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$，$\dot{\bar{x}}_i$，$\dot{\bar{y}}_i$，$\dot{\bar{z}}_i$，同式（6.2）一样，设质点系的速度矢量为$\{\dot{\delta}\}$，则质点系的动能为下列二次式：

$$T=\frac{1}{2}\{\dot{\delta}\}^T[M]\{\dot{\delta}\} \tag{6.6}$$

只要质点系运动，则动能〔即式（6.6）中的二次式T〕总是正的。根据正定的定义，可知质量矩阵也是正定的，因此根据定理8，质量矩阵是正则的。

若求动能T对矢量$\{\dot{\delta}\}$的微分，由式(5.44)可得

$$\frac{\partial T}{\partial\{\dot{\delta}\}}=[M]\{\dot{\delta}\} \tag{6.7}$$

6.1.4 刚度矩阵

如前所说，一个质点可以有沿x，y，z，$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ 6个方向上的位移。所谓沿$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$方向上的位移意味着分别绕x，y，z轴的旋转。同样地，作用于质点上的力也可以用沿x，y，z，$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ 6个方向上的分量来表示。不必说，在$\bar{X}$，$\bar{Y}$，$\bar{z}$方向上的力的分量分别表示对x，y，z轴的旋转力矩。

现在对质点系施加约束，只令某一质点j在可能的6个位移方向中的某一个方向上有单位位移值，而其余质点均不发生位移。于是在弹性材料的作用下，与质点j连接的另一质点i将受到弹性力并发生位移。由于质点i的位移受到约束的缘故，就必然要对它加上一个力。像这样一类的力称为连结节点i与节点j的构件的刚度系数或质点i与j之间的刚度影响系数。

这对于给定位移后质点本身也是一样的。在通常的情况下，也会使这个质点沿其它方向上产生位移，但由于它的其它5个位移都受到了约束，因此也就必然受到作用力。而且要使质点在任意方向有单位位移，也当然要在这个方向加力，其结果使质点受到6个分量的力作用。这些力的分量也同样是刚度系数，即该质点对其自身的刚度影响系数。

刚度系数一般用下述记号来表示：

K_{ij}^{rs}：质点i和j关于r和s方向的刚度系数。即所有质点的全部位移均处于约束状态，只给质点j以沿s方向的单位位移时，为使质点i不产生位移而应在其r方向施加的力。这里，也包含当$i=j$和r＝s的情况。r和s是指x，y，z，$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$诸方向中的任意一个，而且位移和力均取图6.3中箭头表示的方向为正。

例如$K_{ij}^{\bar{y}x}$是当给定质点j沿x方向的单位位移(平移）时，为使质点i在$\bar{y}$方向（绕y轴的旋转向)不发生位移(旋转),而应在$\bar{y}$方向施加的力（力矩)。或者可以理解为当其余所有质点的全部位移被固定而对质点j给以沿x方向上的单位位移时，在质点i的$\bar{y}$方向所产生的力。K_{ii}^{xx}表示质点i在x方向给定单位位移时，应在沿x方向施加的力。

关于刚度系数记号中的下标和上标，其后面的字母代表给定位移的质点和方向，即表示主动的一侧，前面的字母代表由此而受力的质点和方向，也即表示被动的一侧。刚度系数的量纲一般为力/位移，具体地来说可以为t/cm，t/rad，t·m/cm，t·m/rad中的某一个。

质点i和j之间的刚度系数（也包含$i=j$的场合）一般在主动方向和被动方向各有6个，合计有6×6＝36个。可将它们排列成6行和6列的矩阵称为质点i，j之间的刚度系数子矩阵。当质点i与j之间无构件连结时，$[K_{ij}]$便成为零矩阵。

$$
[K_{ij}]=\begin{bmatrix}
K_{ij}^{xx} & K_{ij}^{xy} & K_{ij}^{xz} & K_{ij}^{x\bar{x}} & K_{ij}^{x\bar{y}} & K_{ij}^{x\bar{z}} \\
K_{ij}^{yx} & K_{ij}^{yy} & K_{ij}^{yz} & K_{ij}^{y\bar{x}} & K_{ij}^{y\bar{y}} & K_{ij}^{y\bar{z}} \\
K_{ij}^{zx} & K_{ij}^{zy} & K_{ij}^{zz} & K_{ij}^{z\bar{x}} & K_{ij}^{z\bar{y}} & K_{ij}^{z\bar{z}} \\
K_{ij}^{\bar{x}x} & K_{ij}^{\bar{x}y} & K_{ij}^{\bar{x}z} & K_{ij}^{\bar{x}\bar{x}} & K_{ij}^{\bar{x}\bar{y}} & K_{ij}^{\bar{x}\bar{z}} \\
K_{ij}^{\bar{y}x} & K_{ij}^{\bar{y}y} & K_{ij}^{\bar{y}z} & K_{ij}^{\bar{y}\bar{x}} & K_{ij}^{\bar{y}\bar{y}} & K_{ij}^{\bar{y}\bar{z}} \\
K_{ij}^{\bar{z}x} & K_{ij}^{\bar{z}y} & K_{ij}^{\bar{z}z} & K_{ij}^{\bar{z}\bar{x}} & K_{ij}^{\bar{z}\bar{y}} & K_{ij}^{\bar{z}\bar{z}}
\end{bmatrix} \tag{6.8}
$$

对质点 j 同时在各个方向给以单位位移时，只要质点系是弹性的，这些位移对质点 i 的影响可以作叠加。而且当质点 j 给定的位移不是单位位移而是 α 时，则对质点 i 各个方向的影响也都增加 α 倍。因而当质点 j 的 6 个方向分别给定位 移 x_j，y_j，z_j，$\bar{x}_j$，$\bar{y}_j$，$\bar{z}_j$时，为约束质点 i 在 6 个方向的位移而应施加的力可表示为

$$
\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \\ P_{\bar{x}i} \\ P_{\bar{y}i} \\ P_{\bar{z}i} \end{Bmatrix}_j
=\begin{pmatrix}
K_{ij}^{xx} & K_{ij}^{xy} & K_{ij}^{xz} & K_{ij}^{x\bar{x}} & K_{ij}^{x\bar{y}} & K_{ij}^{x\bar{z}} \\
K_{ij}^{yx} & K_{ij}^{yy} & K_{ij}^{yz} & K_{ij}^{y\bar{x}} & K_{ij}^{y\bar{y}} & K_{ij}^{y\bar{z}} \\
K_{ij}^{zx} & K_{ij}^{zy} & K_{ij}^{zz} & K_{ij}^{z\bar{x}} & K_{ij}^{z\bar{y}} & K_{ij}^{z\bar{z}} \\
K_{ij}^{\bar{x}x} & K_{ij}^{\bar{x}y} & K_{ij}^{\bar{x}z} & K_{ij}^{\bar{x}\bar{x}} & K_{ij}^{\bar{x}\bar{y}} & K_{ij}^{\bar{x}\bar{z}} \\
K_{ij}^{\bar{y}x} & K_{ij}^{\bar{y}y} & K_{ij}^{\bar{y}z} & K_{ij}^{\bar{y}\bar{x}} & K_{ij}^{\bar{y}\bar{y}} & K_{ij}^{\bar{y}\bar{z}} \\
K_{ij}^{\bar{z}x} & K_{ij}^{\bar{z}y} & K_{ij}^{\bar{z}z} & K_{ij}^{\bar{z}\bar{x}} & K_{ij}^{\bar{z}\bar{y}} & K_{ij}^{\bar{z}\bar{z}}
\end{pmatrix}
\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ \bar{x}_j \\ \bar{y}_j \\ \bar{z}_j \end{Bmatrix}
$$

若按式（6.3）、(6.8)和(6.1)，则可写成

$$
\{P_i\}_j=[K_{ij}]\{\delta_j\} \tag{a}
$$

式中$\{P_i\}_j$表示质点 j 的贡献，因此若将全部质点的贡献叠加，便得

$$
\{P_i\}=\sum_j[K_{ij}]\{\delta_j\} \tag{b}
$$

对于 n 质点系，将式（6.8）所示的刚度系数子矩阵$[K_{ij}]$作为第 i 行第 j 列元素所组成的$6n$次方阵

$$
[K]=\begin{bmatrix}
[K_{11}] & [K_{12}] & \cdots & [K_{1n}] \\
[K_{21}] & [K_{22}] & \cdots & [K_{2n}] \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
[K_{n1}] & [K_{n2}] & \cdots & [K_{nn}]
\end{bmatrix} \tag{6.9}
$$

称为系统的刚度系数矩阵或者简单地称为刚度矩阵。

如果把系统的位移矢量用式（6.2）的方式来表示，而把加在系统所有质点上的力矢量用式（6.4）的方式来表示时，就能得到如下关系式：

$$
\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \vdots \\ \{P_n\} \end{Bmatrix}
=\begin{bmatrix}
[K_{11}] & [K_{12}] & \cdots & [K_{1n}] \\
[K_{21}] & [K_{22}] & \cdots & [K_{2n}] \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
[K_{n1}] & [K_{n2}] & \cdots & [K_{nn}]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_n\} \end{Bmatrix} \tag{c}
$$

或者

$$
\{P\}=[K]\{\delta\} \tag{6.10}
$$

如果考虑到有式（b）的关系存在，并在式（c）两边的元素间按5.2.5节所示的分块矩阵乘法列出，式（6.10）的关系就容易理解。

根据如上所述的刚度系数特点，就能把建筑物具有的弹性特性模型化。求刚度系数的方法是结构静力学问题，本书并不涉及。刚度系数与整个系统是静定系统或静不定系统无关，而且即使整个系统具有十分复杂的形状，也只要取出连接此节点与所有有关节点的构件，并求解由此取得的较为简单的局部构件系统，在多数情况下便能求得刚度系数值。

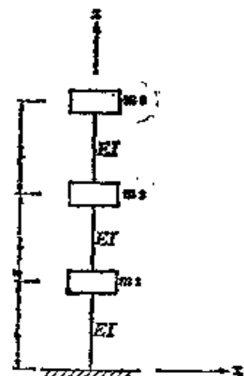


图6.4　3质点系（6自由度）

【例题6.1】 求图6.4所示质点系统的刚度矩阵。各质点之间由抗弯刚度为EI，长度为l的抗弯构件连结，质点系的基础与地表固定。可以只考虑x方向和$\overline{y}$方向的自由度。

〔解〕 由于质点数为3，它的全部自由度数为6×3＝18，因为可以只考虑x轴方向和绕与纸面垂直的y轴旋转方向即$\overline{y}$方向的运动，需要考虑的自由度数便为2×3＝6。

按照定义，所谓刚度系数是当只对一个质点的一个方向给定单位位移时，为使各质点都不发生其它位移所必须加到各质点上的力，由绕度-转角公式（图6.5所示），刚度系数是容易求得的。因而可得如下刚度矩阵：

$$[K]=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} K_{33}^{xx} & K_{33}^{x\bar{y}} \\ K_{33}^{\bar{y}x} & K_{33}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{32}^{xx} & K_{32}^{x\bar{y}} \\ K_{32}^{\bar{y}x} & K_{32}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{31}^{xx} & K_{31}^{x\bar{y}} \\ K_{31}^{\bar{y}x} & K_{31}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} K_{23}^{xx} & K_{23}^{x\bar{y}} \\ K_{23}^{\bar{y}x} & K_{23}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{22}^{xx} & K_{22}^{x\bar{y}} \\ K_{22}^{\bar{y}x} & K_{22}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{21}^{xx} & K_{21}^{x\bar{y}} \\ K_{21}^{\bar{y}x} & K_{21}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} K_{13}^{xx} & K_{13}^{x\bar{y}} \\ K_{13}^{\bar{y}x} & K_{13}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{12}^{xx} & K_{12}^{x\bar{y}} \\ K_{12}^{\bar{y}x} & K_{12}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{11}^{xx} & K_{11}^{x\bar{y}} \\ K_{11}^{\bar{y}x} & K_{11}^{\bar{y}\bar{y}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l & 0 & 0 \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3l & 12 & 0 & -6 & -3l \\ -3l & l^2 & 0 & 4l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3l & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -3l & l^2 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

与质点m_3，m_2，m_1的地表高度相对应，也按下标3，2，1的顺序将元素在矩阵中列出，在实际应用上较易理解。

6.1.5　位移矩阵

试对任意一个质点j沿x，y，z，$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$ 6个方向中的任一方向加单位力（$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$方向即绕x，y，z轴旋转时的单位力矩）。这时设系统仍处于原来的状态，而不施加任何在求刚度系数时所施加过的人为约束。

这样所加的力，会引起其它任意一质点i产生位移，位移分量称为质点i与j之间的柔度系数，位移影响系数或简单地称为位移系数。对受到作用力的质点本身，除在加力方向将产生位移外，还将在其它5个方向产生位移，结果共发生6个方向的位移。这些位移分量也称为位移系数或位移影响系数；通常用如下记号来表示：

f_{ij}^{rs}：关于质点i和j沿r和s方向的位移系数，即只对质点j沿s方向加单位力时，质点i在r方向所产生的位移。

这里同样包含$i=j$和r＝s的情况，r和s也指x，y，z，$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$诸方向中的任意一个，力和位移均取图6.3中箭头表示的方向为正。此外，在记号的下标和上标中，也用后

面的字母表示主动的一边，前面的字母表示被动的一边。所有这些都和以前讲过的刚度系数情况一样。位移系数通常具有位移/力的量纲，具体说来可以是cm/t，cm/(t·cm)，rad/t，rad/(t·cm)中的某一个。

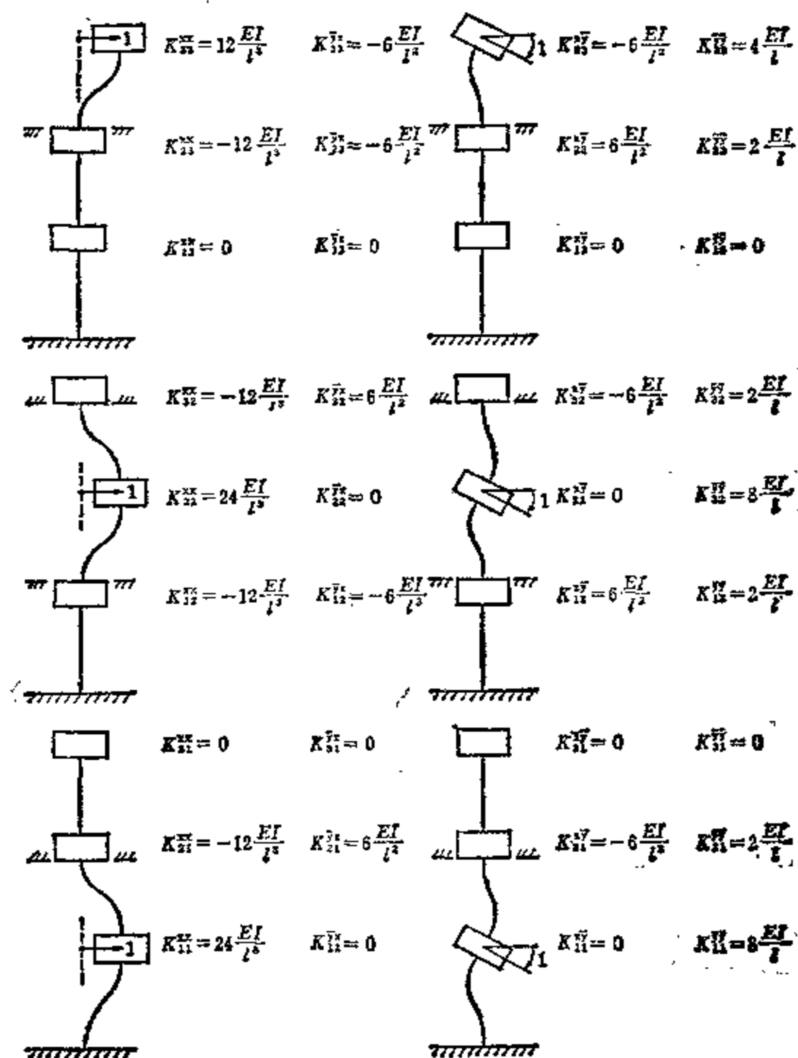


图6.5　刚度系数的计算

把质点 i，j 之间的（也包括 $i=j$ 的场合）位移系数排列成如下的 6 次方阵：

$$[f_{ij}]=\begin{bmatrix} f_{ij}^{xx} & f_{ij}^{xy} & f_{ij}^{xz} & f_{ij}^{x\theta} & f_{ij}^{x\varphi} & f_{ij}^{x\psi} \\ f_{ij}^{yx} & f_{ij}^{yy} & f_{ij}^{yz} & f_{ij}^{y\theta} & f_{ij}^{y\varphi} & f_{ij}^{y\psi} \\ f_{ij}^{zx} & f_{ij}^{zy} & f_{ij}^{zz} & f_{ij}^{z\theta} & f_{ij}^{z\varphi} & f_{ij}^{z\psi} \\ f_{ij}^{\theta x} & f_{ij}^{\theta y} & f_{ij}^{\theta z} & f_{ij}^{\theta\theta} & f_{ij}^{\theta\varphi} & f_{ij}^{\theta\psi} \\ f_{ij}^{\varphi x} & f_{ij}^{\varphi y} & f_{ij}^{\varphi z} & f_{ij}^{\varphi\theta} & f_{ij}^{\varphi\varphi} & f_{ij}^{\varphi\psi} \\ f_{ij}^{\psi x} & f_{ij}^{\psi y} & f_{ij}^{\psi z} & f_{ij}^{\psi\theta} & f_{ij}^{\psi\varphi} & f_{ij}^{\psi\psi} \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

可称为质点 i，j 之间的位移系数子矩阵。如果对某一个质点加力，则该系统的其它质点总会产生某种位移，因而在一般场合下$[f_{ij}]$不会是零矩阵。

对质点 j 的 6 个方向加上用力矢量 $\{P_j\}=\{P_{xj}\ P_{yj}\ P_{zj}\ P_{\bar{x}j}\ P_{\bar{y}j}\ P_{\bar{z}j}\}^T$ 表示的力，在质点 i 的 6 个方向上就会产生位移 $\{\delta_i\}_j=\{x_i\ y_i\ z_i\ \bar{x}_i\ \bar{y}_i\ \bar{z}_i\}^T$，并可用

$$\{\delta_i\}_j=[f_{ij}]\{P_j\} \tag{a}$$

来表示。式中 $\{\delta_i\}_j$ 表示对质点 j 加力后所产生的位移，因而若将所有质点的影响叠加在一起，便有

$$\{\delta_i\}=\sum_j[f_{ij}]\{P_j\} \tag{b}$$

对 n 个质点系，表示成式（b）的概括形式为

$$\{\delta\}=[f]\{P\} \tag{6.13}$$

式中 $\{\delta\}$ 和 $\{P\}$ 分别是由式（6.1）和（6.4）所示系统的位移矢量和力矢量，$[f]$ 则为

$$[f]=\begin{bmatrix}[f_{11}] & [f_{12}] & \cdots & [f_{1n}]\\ [f_{21}] & [f_{22}] & \cdots & [f_{2n}]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [f_{n1}] & [f_{n2}] & \cdots & [f_{nn}]\end{bmatrix} \tag{6.14}$$

是将式（6.12）表示的位移子矩阵 $[f_{ij}]$ 作为第 i 行第 j 列元素排列而成的 $6n$ 次方阵。式（6.14）中的矩阵则称为位移矩阵。

和前面的刚度矩阵一样，位移矩阵是将建筑物具有的弹性性质经过数量化后的结果。求位移系数的方法，也同样是属于结构静力学的课题，在本书中不作讨论。当系统的形状较为简单或为静定系统时，位移系数值很容易计算。

【例题6.2】 求图6.4所示 6 个自由度质点系的位移矩阵。

〔解〕 按定义，位移系数为在系统的所有质点均能自由地产生位移的状态下，仅对一个质点的一个方向加以单位力时，其它各质点所产生的位移。根据悬臂梁理论，这些位移值可很容易用图6.6中的方法求得。由此求得的位移矩阵为

$$[f]=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{33}^{xx} & f_{33}^{xy}\\ f_{33}^{yx} & f_{33}^{yy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f_{32}^{xx} & f_{32}^{xy}\\ f_{32}^{yx} & f_{32}^{yy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f_{31}^{xx} & f_{31}^{xy}\\ f_{31}^{yx} & f_{31}^{yy}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}f_{23}^{xx} & f_{23}^{xy}\\ f_{23}^{yx} & f_{23}^{yy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f_{22}^{xx} & f_{22}^{xy}\\ f_{22}^{yx} & f_{22}^{yy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f_{21}^{xx} & f_{21}^{xy}\\ f_{21}^{yx} & f_{21}^{yy}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}f_{13}^{xx} & f_{13}^{xy}\\ f_{13}^{yx} & f_{13}^{yy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f_{12}^{xx} & f_{12}^{xy}\\ f_{12}^{yx} & f_{12}^{yy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f_{11}^{xx} & f_{11}^{xy}\\ f_{11}^{yx} & f_{11}^{yy}\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\frac{l}{6EI}\begin{pmatrix}54l^2 & 27l & 28l^2 & 24l & 8l^2 & 15l\\ 27l & 18 & 12l & 12 & 3l & 6\\ 28l^2 & 12l & 16l^2 & 12l & 5l^2 & 9l\\ 24l & 12 & 12l & 12 & 3l & 6\\ 8l^2 & 3l & 5l^2 & 3l & 2l^2 & 3l\\ 15l & 6 & 9l & 6 & 3l & 6\end{pmatrix} \tag{6.15}$$

6.1.6 影响矩阵的性质

刚度矩阵和位移矩阵统称为影响矩阵，它给出整个系统的力-位移关系。下面将要提到，影响矩阵具有许多重要性质，它们在解析分析中十分有用。

a. 正则性

对系统中的某个质点 i 沿 x 方向渐渐地加上力 P_{xi}，并假定沿力方向产生的位移为 x_i，这时系统中积累的势能为 $\frac{1}{2}P_{xi}x_i$。假定由式（6.4）表示的力矢量是同时作用到系统上的，而且各质点由此产生的位移可用式（6.2）中的位移矢量来表示，于是系统积累的势能 V 为

$$V = \frac{1}{2}\{P\}^{T}\{\delta\} \tag{a}$$

或

$$V = \frac{1}{2}\{\delta\}^{T}\{P\} \tag{b}$$

或将式（6.10）代入式（b），便有

$$V = \frac{1}{2}\{\delta\}^{T}[K]\{\delta\}, \tag{6.16}$$

也可将式（6.13）代入式（a），便有

$$V = \frac{1}{2}\{P\}^{T}[f]\{P\}, \tag{6.17}$$

由此可知势能也是按二次式给出的。由于假定建筑物是与地表固定的，由此产生的位移和势能也必然是正的。根据定义，式（6.16）和（6.17）所示的具有二次式形式的矩阵$[K]$，$[f]$也都是正定的，因此按定理8也是正则的。这就称为影响矩阵的正则性。

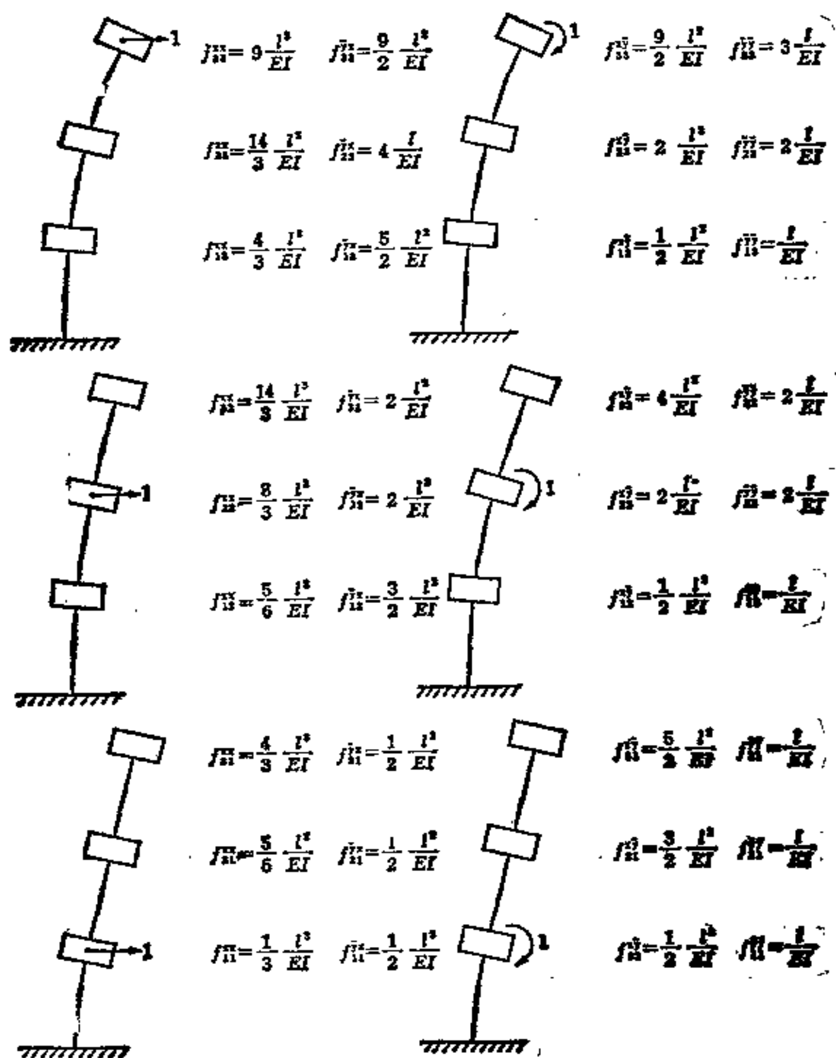


图6.6　位移系数的计算

b. 对称性

采用不同的顺序对系统加上两组力，并对这两种情况下所做的功，也即系统所蓄的势能作一比较。设$\{\delta\}_a$和$\{\delta\}_b$分别为对系统单独加力$\{P\}_a$和$\{P\}_b$时所产生的位移。

首先，先加力$\{P\}_a$，继而加力$\{P\}_b$，与力$\{P\}_a$所对应的功和式（a）相同，为$V_a=\frac{1}{2}\{P\}_a^T\{\delta\}_a$，力$\{P\}_b$所对应的功为$V_b=\frac{1}{2}\{P\}_b^T\{\delta\}_b+\{P\}_a^T\{\delta\}_b$。对于在加力$\{P\}_b$期间所产生的位移$\{\delta\}_b$来讲，由于已经加上了力$\{P\}_a$，其值始终和原来作用时一样，因此所做的功为$\{P\}_a^T\{\delta\}_b$，而不用乘1/2。这时，系统所蓄的势能$V$为$V_a$和$V_b$之和，即

$$V=\frac{1}{2}\{P\}_a^T\{\delta\}_a+\frac{1}{2}\{P\}_b^T\{\delta\}_b+\{P\}_a^T\{\delta\}_b \tag{c}$$

接着，再以相反的顺序加力，即先加力$\{P\}_b$，对应的势能为$V_b=\frac{1}{2}\{P\}_b^T\{\delta\}_b$，继而加力$\{P\}_a$，对应的势能为$V_a=\frac{1}{2}\{P\}_a^T\{\delta\}_a+\{P\}_b^T\{\delta\}_a$，系统的总势能为

$$V=\frac{1}{2}\{P\}_b^T\{\delta\}_b+\frac{1}{2}\{P\}_a^T\{\delta\}_a+\{P\}_b^T\{\delta\}_a \tag{d}$$

因为系统只限于是线性的，它的势能与加力的顺序无关，因而式（c）和（d）相等，便得

$$\{P\}_a^T\{\delta\}_b=\{P\}_b^T\{\delta\}_a \tag{e}$$

即第一组力在第二组力产生的位移上所做的功等于第二组力在第一组力产生的位移上所做的功。

由式（6.10），得$\{P\}_a=[K]\{\delta\}_a$，$\{P\}_b=[K]\{\delta\}_b$，经转置后分别为$\{P\}_a^T=\{\delta\}_a^T[K]^T$，$\{P\}_b^T=\{\delta\}_b^T[K]^T$，代入式（e），便得

$$\{\delta\}_a^T[K]^T\{\delta\}_b=\{\delta\}_b^T[K]^T\{\delta\}_a \tag{f}$$

由于式（f）的两边均为标量，经转置后其值也不变。这样如对式（f）的右边作转置，则可写成$\{\delta\}_a^T[K]^T\{\delta\}_b=\{\delta\}_a^T[K]\{\delta\}_b$。经比较后，可知存在如

$$[K]^T=[K] \tag{6.18}$$

的关系式。

若将式（6.13）的关系用于式（e），便同样地可得到如下关系式：

$$[f]^T=[f] \tag{6.19}$$

由此可知，刚度矩阵和柔度矩阵都具有对称性。

这种对称性也可表示成

$$\left.\begin{array}{ll} f_{ij}=f_{ji} & \text{麦克斯韦尔（Maxwell）法则} \\ K_{ij}=K_{ji} & \text{贝蒂（Betti）法则} \end{array}\right\}$$

如上面所注明的那样，亦可称为麦克斯韦尔和贝蒂法则。

再者，若对式（6.16）和（6.17）表示的势能分别作对矢量$\{\delta\}$和$\{P\}$的微分，由于$[K]$和$[f]$都是对称的，再由式（5.44），便得到

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial\{\delta\}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(\{\delta\}^T[K]\{\delta\})}{\partial\{\delta\}}=[K]\{\delta\}=\{P\} \\ \dfrac{\partial V}{\partial\{P\}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(\{P\}^T[f]\{P\})}{\partial\{P\}}=[f]\{P\}=\{\delta\} \end{array}\right\} \tag{6.20}$$

附带说一下，这两个式可分别表示为卡斯蒂里安诺（Castigliano）第1定理和第2定理。

c。互易性

因为刚性矩阵是正则的，所以有逆矩阵存在。现在对式（6.10）即$\{P\}=[K]\{\delta\}$前乘$[K]^{-1}$，有

$$[K]^{-1}\{P\}=[K]^{-1}[K]\{\delta\}=[I]\{\delta\}=\{\delta\}$$

若将此式与式（6.13）即$[f]\{P\}=\{\delta\}$进行比较，便有关系式

$$[f]=[K]^{-1} \tag{g}$$

同样对式（6.13）前乘$[f]^{-1}$，有

$$[K]=[f]^{-1} \tag{h}$$

将式（g）与（h）归纳后，可写成

$$[K][f]=[f][K]=[I] \tag{6.21}$$

即刚度矩阵与柔度矩阵为互逆的矩阵，这称之为影响矩阵的互易性。因此实用时，可视刚度矩阵与柔度矩阵哪一种计算方法容易，必要时也可通过求其逆矩阵来计算另一个矩阵。

【例题6.3】 证明图6.4中的质点系影响矩阵的互易性。

〔解〕 在例题6.1的式（6.11）和例题6.2的式（6.15）中，已经求出了刚度矩阵和柔度矩阵，若取这两个矩阵的乘积，便得到单位矩阵

$$[K][f]=\frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l & 0 & 0 \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3l & 12 & 0 & -6 & -3l \\ -3l & l^2 & 0 & 4l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3l & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -3l & l^2 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\times\frac{l}{6EI}\begin{bmatrix} 54l^2 & 27l & 28l^2 & 24l & 8l^2 & 15l \\ 27l & 18 & 12l & 12 & 3l & 6 \\ 28l^2 & 12l & 16l^2 & 12l & 5l^2 & 9l \\ 24l & 12 & 12l & 12 & 3l & 6 \\ 8l^2 & 3l & 5l^2 & 3l & 2l^2 & 3l \\ 15l & 6 & 9l & 6 & 3l & 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[I]$$

这样便证明了影响矩阵的互易性。

6.1.7 阻尼矩阵

多质点系中的阻尼通常被模型化，将质点与质点之间的连结构件假想为一个经过设计的阻尼器，使阻尼力与活塞的速度成比例。在阻尼器中，有的给出活塞的平移速度，有的给出旋转速度。阻尼力由阻尼器产生，它的考虑方法与6.1.4节中求刚度矩阵时考虑构件的弹性

力方法大致相同。

为此，对系统施加约束，使系统的全部质点均不产生速度，然后考虑对任意一个质点 j，只对其6个自由度中的任意一个方向给定单位速度（平移速度或旋转速度）。于是，由于阻尼器的作用，使与质点 j 连结的其它质点均受到阻尼力的作用，并产生速度。为使质点 i 的速度受到约束，就必须对它加力。这种性质的力，一般称为连结质点 i 与质点 j 的阻尼器的阻尼系数或称质点 i，j 之间的阻尼影响系数。

和刚度系数或柔度系数一样，阻尼系数一般也采用如下的表示方法：

C_{ij}^{rs}：关于质点 i，j 之间沿 r 和 s 方向的阻尼系数。即当全部质点的所有速度均处于受约束状态，只有质点 j 在 s 方向给定单位速度时，为使质点 i 不产生任何速度而沿其 r 方向所应施加的力。

一般，阻尼系数具有力/速度的量纲，具体来说可以是t·s/cm，t·s/rad，t·m·s/cm，t·m·s/rad中的某一个。

与刚度系数情况一样，称

$$[C_{ij}]=\begin{pmatrix} C_{ij}^{xx} & C_{ij}^{xy} & C_{ij}^{xz} & C_{ij}^{x\bar{x}} & C_{ij}^{x\bar{y}} & C_{ij}^{x\bar{z}} \\ C_{ij}^{yx} & C_{ij}^{yy} & C_{ij}^{yz} & C_{ij}^{y\bar{x}} & C_{ij}^{y\bar{y}} & C_{ij}^{y\bar{z}} \\ C_{ij}^{zx} & C_{ij}^{zy} & C_{ij}^{zz} & C_{ij}^{z\bar{x}} & C_{ij}^{z\bar{y}} & C_{ij}^{z\bar{z}} \\ C_{ij}^{\bar{x}x} & C_{ij}^{\bar{x}y} & C_{ij}^{\bar{x}z} & C_{ij}^{\bar{x}\bar{x}} & C_{ij}^{\bar{x}\bar{y}} & C_{ij}^{\bar{x}\bar{z}} \\ C_{ij}^{\bar{y}x} & C_{ij}^{\bar{y}y} & C_{ij}^{\bar{y}z} & C_{ij}^{\bar{y}\bar{x}} & C_{ij}^{\bar{y}\bar{y}} & C_{ij}^{\bar{y}\bar{z}} \\ C_{ij}^{\bar{z}x} & C_{ij}^{\bar{z}y} & C_{ij}^{\bar{z}z} & C_{ij}^{\bar{z}\bar{x}} & C_{ij}^{\bar{z}\bar{y}} & C_{ij}^{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

为质点 i，j 间的阻尼系数子矩阵。称

$$[C]=\begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] & \cdots\cdots & [C_{1n}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] & \cdots\cdots & [C_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [C_{n1}] & [C_{n2}] & \cdots\cdots & [C_{nn}] \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

为系统的阻尼系数矩阵或阻尼矩阵。此外，将式（6.1）所示的质点位移矢量对时间微分，并表示成

$$\{\dot{\delta}_i\}=\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \\ \dot{\bar{x}}_i \\ \dot{\bar{y}}_i \\ \dot{\bar{z}}_i \end{bmatrix}$$

时，称

$$\{\dot{\delta}\}=\begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}_1\} \\ \{\dot{\delta}_2\} \\ \vdots \\ \{\dot{\delta}_n\} \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

为系统的速度矢量。当对质点系的全部质点给以式（6.24）所示的速度时，由于阻尼器所引

起的阻尼力的抵抗作用，所应加在各质点上的力矢量$\{P_D\}$为

$$\{P_D\}=[C]\{\dot{\delta}\} \tag{6.25}$$

与式（6.6）给出的系统动能和式（6.16）给出的系统势能一样，有相同形式的二次式

$$R=\frac{1}{2}\{\dot{\delta}\}^T[C]\{\dot{\delta}\} \tag{6.26}$$

称为阻尼能或耗散能。和推导式（6.18）或式（6.19）的情况相同，作类似的考察，就有

$$[C]^T=[C] \tag{6.27}$$

即，阻尼矩阵也是对称矩阵。因此根据式（5.44）同样可得

$$\frac{\partial R}{\partial\{\dot{\delta}\}}=[C]\{\dot{\delta}\} \tag{6.28}$$

质量矩阵和刚度矩阵可以由建筑物的重量和弹性特性求出，比较容易。但要直接决定系统的阻尼影响系数，还缺乏依据资料。因此，为了对阻尼矩阵作出定量的评价，必须引入某些假定（参照第七章）。

6.2 运动方程式

6.2.1 按达朗贝尔原理列运动方程

当给定系统各质点的位移为$\{\delta\}$时，应加于各质点的力矢量$\{P\}$按式（6.10）可表示成$\{P\}=[K]\{\delta\}$，式中$[K]$为由式（6.9)给出的刚度矩阵。因此可以得到系统的静力平衡方程式$\{P\}-[K]\{\delta\}=0$。

当系统处于运动状态时，设系统各质点沿正方向速度和加速度分别为$\{\dot{\delta}\}$、$\{\ddot{\delta}\}$。这时阻尼器所产生的阻尼力如式（6.25）所示为$\{P_D\}=[C]\{\dot{\delta}\}$，于是作用于各质点的力为$-[C]\{\dot{\delta}\}$。根据达朗贝尔原理，若质点的加速度为$\{\ddot{\delta}\}$，则对应各质点的质量与加速度的乘积为$[M]\{\ddot{\delta}\}$，加负号后便为作用的惯性力$-[M]\{\ddot{\delta}\}$。因为系统保持平衡，所以有$\{P\}-[K]\{\delta\}-[C]\{\dot{\delta}\}-[M]\{\ddot{\delta}\}=\{0\}$，即有运动方程式

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\} \tag{6.29}$$

式中$[M]$：质量矩阵；$[C]$：阻尼矩阵；$[K]$：刚度矩阵；$\{\ddot{\delta}\}$：加速度矢量；$\{\dot{\delta}\}$：速度矢量；$\{\delta\}$：位移矢量；$\{P\}$：激振力矢量

在运动方程中，位于各矩阵内的非对角元素表示坐标间的耦联，这里不再说明。

【例题6.4】 求图6.7所示无阻尼质点系的自由振动方程式。质点的质量和构件的弹簧常数均在图中给出，并且只考虑沿水平方向的位移。

〔解〕 刚度系数K_{ij}^{xx}（因为只考虑水平方向的位移，所以上标xx可以省略）除下面所列出的以外均为0：

$$\begin{aligned}
&K_{44}=k_4 && K_{34}=-k_4 && \\
&K_{33}=k_3+k_4+k_6 && K_{43}=-k_4 && K_{13}=-k_6\\
&K_{22}=k_2+k_5 && K_{12}=-k_5 && \\
&K_{11}=k_1+k_5+k_6 && K_{31}=-k_6 && K_{21}=-k_5
\end{aligned}$$

质点的水平位移用$x_i(i=1,2,3,4)$表示，因为是无阻尼的，所以$[C]=[0]$，又因是自由振动，所以$\{P\}=\{0\}$，式（6.29）的运动方程式成

$$\begin{bmatrix} m_4 & & & \\ & m_3 & & \\ & & m_2 & \\ & & & m_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_3+k_4+k_6 & 0 & -k_6 \\ 0 & 0 & k_2+k_5 & -k_5 \\ 0 & -k_6 & -k_5 & k_1+k_5+k_6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix}=\{0\} \tag{6.30}$$

6.2.2 按拉格朗日方程式列运动方程

前面提到的列方程式的方法，立足于所有力的平衡来导出系统的运动方程式。这时动力效应也按达朗贝尔原理化成静力平衡问题。但是，当系统的构造复杂因而运动状态也复杂时，按照力的平衡来列运动方程式，就难以从直观上来考虑问题。

这一节讲的变分法列方程的方法，对于处理这一类困难问题十分方便，其特点是对于复杂系统列运动方程式十分简单，而且只需机械地、按部就班地推导便可。

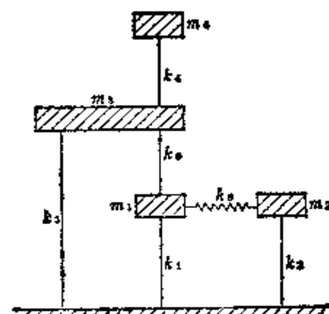


图6.7　多质点系的例子

a. 泛函数・变分问题

当变量 z 的值由定义在某变域上的函数$f(t)$所决定时，称变量z为函数$f(t)$的泛函数，这时称函数$f(t)$为变函数。如把泛函数称为函数的函数，便可把它表示成 $z=F[f(t)]$。两个变函数之差$\delta f=f(t)-f_0(t)$，称为变函数的增量或变分。变分 δf也是 t 的函数。称$\delta f\to 0$的极限状况时泛函数值的变化率为泛函数$F[f(t)]$的变分，用记号δF表示。

一般把求泛函数的极大值或极小值问题称为变分问题，求解变分问题的方法和理论称为变分法。物体从空间某点向另一点最速下降的路径是一条连结两点的圆滚线，长度一定的封闭曲线所围面积最大者为圆等问题，都是众所周知的典型变分问题。

本书只讨论将变分法应用于系统振动问题的结果，而对变分法本身不作深入的介绍。

b. 欧拉方程式

极大值和极小值统称为极值。众所周知，在求函数$f(t)$的微分df时，$f(t)$为极值的条件为$df=0$。与此相应，与变函数的变化相对应的泛函数取极值的条件可表示为

$$\delta F=0 \tag{a}$$

现设$q(t)$为独立变量 t 的连续函数，$\dot{q}(t)$为$q(t)$对 t 的微分，若把 t 看作时间，$q(t)$ 为质点的位移，则$\dot{q}(t)$为质点的速度。现在来考虑包含$q(t)$和$\dot{q}(t)$的函数$\phi(q,\dot{q})$和此函数在$t_0\leqslant t\leqslant t_1$上的积分

$$F[q(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\phi(q,\dot{q})\mathrm{d}t \tag{b}$$

只要函数$q(t)$的形式确定，$\dot{q}(t)$也就确定，于是式（b）中的积分值也就决定。因此，这个积分便是以$q(t)$为变函数的泛函数。

此泛函数取极值的条件可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\phi(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial\phi(q,\dot{q})}{\partial q}=0 \tag{c}$$

这个式子称为欧拉方程式，这是式（b）的泛函取极值的条件式（a）的另一种表现形式。

上面仅对只包含一个函数$q(t)$时的ϕ给出欧拉方程式，对于包含 n 个函数$q_1(t)$，$q_2(t)\cdots$

$q_n(t)$及它们的微分式的情况，也能够表示成同一类形式。此时，相当于式（b）的积分为

$$F=\int_{t_0}^{t_1}\phi(q_1,\ q_2\cdots q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2\cdots\dot{q}_n)\mathrm{d}t, \tag{d}$$

为了获得表示这个积分极值条件的欧拉公式，将式（c）推广，便可得到n个公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\phi}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,\ 2\cdots n \tag{e}$$

c. 哈密尔顿原理

在用数理方法处理自然现象时，往往采用微分方程的形式来表示支配自然现象的基本法则。如第一章中对牛顿运动定律列出的运动微分方程式就是一个例子。本书也以这一类微分方程式为基础，从理论上来讨论振动问题。可是，自然现象是根据自然规律以某种目标变化的，这种现象有时可能通过某个量取极大值或极小值的所谓极值条件来表现它的规律。这正是这里所要考虑的变分法。象这种用变分形式表示现象的基本法则，一般称为变分原理。这一节要讲的哈密尔顿原理是变分原理中有代表性的一种，它以不同于牛顿定律的形式来表示动力学基本定律。

变分原理的形式往往很简洁。而且，一般把能量作为用变分原理来处理的量。因为能量是一种标量，所以几乎没有必要象考虑力的平衡条件去推导运动微分方程式那样考虑矢量的问题，因而使问题的处理十分简便。哈密尔顿原理也有这样的优点。

单质点系的动能和势能已在第二章中讨论过。但是这里要考虑具有n个自由度的系统，振动体系的状态要用广义坐标$q_1(t)$，$q_2(t)\cdots q_n(t)$来表示。这时，动能T用广义坐标和它对时间的微分即广义速度来表示，势能V用广义坐标表示，即

$$\left.\begin{aligned}T&=T(q_1,\ q_2\cdots q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2\cdots\dot{q}_n)\\V&=V(q_1,\ q_2\cdots q_n)\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

这里没有包含时间t的显式。

系统的动能与势能之差$L=T-V$称为拉格朗日函数。拉格朗日函数在某个时间段上的积分

$$F=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t \tag{g}$$

称为作用量积分。显然，作用量积分是以广义坐标$q_i(t)$（$i=1,\ 2\cdots n$）为变函数的泛函数。

哈密尔顿原理是将时刻t_0与t_1之间所作的运动由对式（g）所示的泛函数取极值的条件〔即式（a）所示$\delta F=0$〕来给出的变分原理，根据式（g）可写为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\,\mathrm{d}t=0 \tag{h}$$

然后考虑来自系统外部的、与坐标值无关，且沿坐标q_i方向为Q_i（$i=1,\ 2\cdots n$）的广义力的作用。广义力是一种除通常的力以外还包含力矩的力。当广义坐标为位移时，对应于通常的力；当广义坐标为转角时，便与力矩相对应。

在力学问题中，经常要研究当一个系统给定微小位移时，其状态与力、位移和能量之间的关系。例如，设振动质点的坐标为$q(t)$，并使其有微小增量。这部分增量在力学上表示增加微小的位移，在数学上便是函数$q(t)$的变分，用δq表示。

一般把从几何学观点认为可能产生的微小位移称为虚位移。例如使某系统的一个固定点

产生一个从几何学看是可能产生的，但实际上并不发生的位移，这就是如字面意义上所说的虚位移。象这样考虑得到的虚位移，在静力学问题中经常起重要的作用，但虚位移也可以是实际上可以发生的位移。

当系统的各部分发生虚位移δq_i时，若考虑广义力对系统所做的功，便能得到外力作用下哈密尔顿原理的推广表达式：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\,\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i\mathrm{d}t=0 \tag{i}$$

d。拉格朗日方程式

若比较式（d）和式（i）中的积分，便可得到

$$\phi=T-V+\sum_{i=1}^{n}Q_iq_i$$

与表示式（d）极值条件的欧拉方程式（e）相对应，表示式（i）的哈密尔顿原理的欧拉公式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial V}{\partial\dot q_i}+\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\sum_{i=1}^{n}Q_iq_i\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{i=1}^{n}Q_iq_i\right)=0 \tag{j}$$

根据式（f），有$\partial V/\partial\dot q_i=0$，并且显然存在

$$\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\sum_{i=1}^{n}Q_iq_i=0,\quad \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{i=1}^{n}Q_iq_i=Q_i,$$

因此，式（j）可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i\qquad i=1,\ 2\cdots n \tag{k}$$

下面考察能量T，V的表达式。以图4.4(d)所示两个质点的系统为例，质点m_1，m_2的位移为x_1，x_2，由几何学关系可知：$x_1=H_1\tan q_1$，$x_2=H_1\tan q_1+H_2\tan q_2$。因而有$\dot x_1=H_1\dot q_1\sec^2q_1$，和$\dot x_2=H_1\dot q_1\sec^2q_1+H_2\dot q_2\sec^2q_2$。于是动能$T$和势能$V$便可取如下表达式：

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}m_1\dot x_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot x_2^2\\&=\frac{1}{2}[m_1(H_1\dot q_1\sec^2q_1)^2+m_2(H_1\dot q_1\sec^2q_1+H_2\dot q_2\sec^2q_2)^2]\\V&=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2\\&=\frac{1}{2}[k_1(H_1\tan q_1)^2+k_2(H_2\tan q_2)^2]\end{aligned}$$

都变成了式（f）中所示函数$T=T(q_1,\ q_2,\ \dot q_1,\ \dot q_2)$和$V=V(q_1,\ q_2)$的形式。但是，假定位移只是在很小的范围内发生变化，便有$\tan q_1\doteq q_1$，$\tan q_2\doteq q_2$，和$\sec q_1\doteq\sec q_2\doteq1$，这样上式便变成

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}[(m_1+m_2)H_1^2\dot q_1^2+2m_2H_1H_2\dot q_1\dot q_2+m_2H_2^2\dot q_2^2]\\V&=\frac{1}{2}[k_1H_1^2q_1^2+k_2H_2^2q_2^2]\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

其中动能式子中不再包含q_1和q_2。

于是当考虑系统的位移即坐标是激小量时，它的动能$T=T(\dot{q}_1, \dot{q}_2\cdots\dot{q}_n)$成为速度自身的函数，故有$\frac{\partial T}{\partial q_i}=0$。因此式（k）可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i \qquad i=1,\ 2\cdots n \tag{m}$$

此外，如式（l）所示，动能T是广义速度$\dot{q}$的二次式，位能V则是广义坐标q的二次式。

如果系统中有用阻尼器表示的阻尼机制，则还必须引入2.3.7节讨论过的阻尼能量的概念。一般地，阻尼能R等于各阻尼器的阻尼系数与活塞速度平方乘积之半，就整个系统来说，可求其总和，即可表示成

$$R=\frac{1}{2}\left(c_1\dot{x}_1^2+c_2\dot{x}_2^2+\cdots\right)=\frac{1}{2}\sum_i c_i\dot{x}_i^2$$

式中的各个$\dot{x}$为与阻尼器相连接的两个质点i，j之间的相对速度，即$\dot{q}_i-\dot{q}_j$，因此阻尼能便为广义速度$\dot{q}$的二次式。

对于具有这一类阻尼机制的情况，式（m）可表示成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i \qquad i=1,\ 2\cdots n \tag{n}$$

式中　T：动能；R：阻尼能；V：势能；q_i：广义坐标；$\dot{q}_i=\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$：广义速度；$Q_i$：与坐标$q_i$有关的广义力。

式（n）就称为拉格朗日方程式。

考虑单质点系的情况，在式（n）中置$n=1$，并令$q_1=x$，便有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\dot{x}}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=Q$$

和根据牛顿运动定律得到的式（2.97）一致，若进一步令$Q=0$和$R=0$，便分别推得式（2.69）与（2.31）。

拉格朗日方程式原来就是与作为变分原理的哈密尔顿原理相对应的欧拉方程式。哈密尔顿原理是"原理"，它不能用其它原理或法则来证明。但是，如果仔细观察一下上面所述的，或如后面例题6.5所给出的那种方程式上的一致性，哈密尔顿原理就可以理解为其本质上与牛顿运动定律是完全相同的。

如果把式（n）中的各项分别看作列矢量的第i个分量，便可把n个拉格朗日方程式合并成一个，采用式（5.41）矢量微分的表示方法，写成下式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{q}\}}\right)+\frac{\partial R}{\partial\{\dot{q}\}}+\frac{\partial V}{\partial\{q\}}=\{Q\} \tag{o}$$

e．运动方程式的推导

如上所述，与哈密尔顿原理对应的欧拉方程式就是拉格朗日方程式，一般可以表示成式（n），或按照矢量微分形式表示成式（o）。现在如果采用质点的实际位移作为广义坐标，（o）式便可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{\delta}\}}\right)+\frac{\partial R}{\partial\{\dot{\delta}\}}+\frac{\partial V}{\partial\{\delta\}}=\{P\}, \tag{6.31}$$

式中，T：动能；R：阻尼能；V：势能；$\{\dot{\delta}\}$：速度矢量；$\{\delta\}$：位移矢量；$\{P\}$：激振力矢量。

由式（6.6）、(6.16)和（6.26)，动能、势能和阻尼能分别用2次形式给出：

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\{\dot{\delta}\}^T[M]\{\dot{\delta}\}\\ R&=\frac{1}{2}\{\dot{\delta}\}^T[C]\{\dot{\delta}\}\\ V&=\frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]\{\delta\}\end{aligned}\right\}$$

按照式（5.44）所示的矢量微分方法，便可得到如式（6.7）、(6.28）和（6.20）中第一个式子表示的形状

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial\{\dot{\delta}\}}&=[M]\{\dot{\delta}\}\\ \frac{\partial R}{\partial\{\dot{\delta}\}}&=[C]\{\dot{\delta}\}\\ \frac{\partial V}{\partial\{\delta\}}&=[K]\{\delta\}\end{aligned}\right\} \tag{p}$$

如将式（p）代入式（6.31)，便有

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\}$$

于是得到和式（6.29）完全相同的运动方程式。

【例题6.5】 采用拉格朗日方程式推导例题6.4的解答。

〔解〕 动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2+m_3\dot{x}_3^2+m_4\dot{x}_4^2)$$

$$V=\frac{1}{2}[k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2+k_4(x_4-x_3)^2+k_5(x_2-x_1)^2+k_6(x_3-x_1)^2]$$

因为是无阻尼的自由振动，所以$R=0$，$\{P\}=\{0\}$。代入拉格朗日方程式（6.31)得

$$\begin{aligned} &d(\partial T/\partial\dot{x}_4)/dt+\partial V/\partial x_4=m_4\ddot{x}_4+k_4(x_4-x_3)=0\\ &d(\partial T/\partial\dot{x}_3)/dt+\partial V/\partial x_3=m_3\ddot{x}_3+k_3x_3-k_4(x_4-x_3)+k_6(x_3-x_1)=0\\ &d(\partial T/\partial\dot{x}_2)/dt+\partial V/\partial x_2=m_2\ddot{x}_2+k_2x_2+k_5(x_2-x_1)=0\\ &d(\partial T/\partial\dot{x}_1)/dt+\partial V/\partial x_1=m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_5(x_2-x_1)-k_6(x_3-x_1)=0\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} &m_4\ddot{x}_4+k_4x_4-k_4x_3=0\\ &m_3\ddot{x}_3-k_4x_4+(k_3+k_4+k_6)x_3-k_6x_1=0\\ &m_2\ddot{x}_2+(k_2+k_5)x_2-k_5x_1=0\\ &m_1\ddot{x}_1-k_6x_3-k_5x_2+(k_1+k_5+k_6)x_1=0\end{aligned}$$

结果与例题6.4中的式（6.30）一致。

6.3 自由度的减缩

直到前节为止的一般性讨论中，均假定各质点可以自由而且互相独立地发生与其六个自由度分别对应的位移。至于实际构造物，各位移会有大小不同的差别，具体状况与此假定

相近。但是，如果要考虑与系统自由度相对应的全部位移，计算量无疑会膨胀到超越实用许可的程度。

因此实际上，要对构造物的性能进行事先估测，还要考虑分析目的或所要求的结果精度与计算量之间的平衡，以尽量减少自由度的数目，使模型简化。这一类谋求减缩自由度或使模型简化的方法，就是本节要讲的位移约束和静态减缩，更多的情况是恰当地组合运用这两种方法。

6.3.1 位移的约束

一般把预先加到系统位移上的限制称为约束。例如令

$$x_i = 0 \tag{a}$$

就是假定质点 i 不发生沿 x 方向的位移，或者认为由此产生的影响可以忽略不计，成为加到系统上的一个约束。又如，假定质点 i 和质点 j 在 y 方向是用无限刚性的构件连接的，这样便可以忽略这两个质点间沿 y 方向的相对位移，于是便有

$$y_i - y_j = 0 \tag{b}$$

这就是用公式来表示所施加的约束。式（a）和式（b）表示加于系统位移坐标上的约束或加在位移坐标间的约束关系的方程式，称为约束条件式。

若设系统的质点数为 n，一般来说，系统就有$6n$个自由度，若有 r 个约束条件式，则系统的自由度数减少到

$$s = 6n - r$$

即独立的位移坐标数为 s 个。

6.3.2 静态减缩

现在来看式（6.29）中右边的外力矢量$\{P\}$。质点在某个方向受到外部激振力明显作用时沿这个方向的位移称为主位移。与此相应的问题是，某质点在某个方向上没有受到外力的作用，或者可以看成没有外力的作用，即当外部激振力的分量为零时，与此所对应的位移坐标称为从位移。

现在把位移矢量分割成并列的两个部分：只包含主位移的矢量$\{\delta\}_r$和只包含从位移的矢量$\{\delta\}_s$：

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\}_r \\ \{\delta\}_s \end{Bmatrix} \tag{6.33}$$

并进一步将各个矩阵也作相应的变更，于是式（6.29）便能写成如下形式

$$\begin{bmatrix} [M]_r & [0] \\ [0] & [M]_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}\}_r \\ \{\ddot{\delta}\}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C]_{rr} & [C]_{rs} \\ [C]_{sr} & [C]_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}\}_r \\ \{\dot{\delta}\}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K]_{rr} & [K]_{rs} \\ [K]_{sr} & [K]_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_r \\ \{\delta\}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_r \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{a}$$

由式（a）可见，不仅沿外力作用的方向，而且在外力分量为零的方向，即沿从位移的方向，也仍然有惯性力$[M]_s\{\ddot{\delta}\}_s$和阻尼力$[C]_{sr}\{\dot{\delta}\}_r+[C]_{ss}\{\dot{\delta}\}_s$的作用，实际运动的状况就是这样的。

但是作为一种近似，现在假定沿从位移的方向没有动力（即惯性力和阻尼力）作用。这只要令式（a）中第2行的子矩阵$[M]_s=[0]$，$[C]_{sr}=[C]_{ss}=[0]$，便可满足此假定条件。由于式（6.27）中的阻尼矩阵具有对称性，于是有：$[C]_{rs}=[C]_{sr}^T=[0]$，式（a）便可写成

$$\begin{bmatrix} [M]_r & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}\}_r \\ \{\ddot{\delta}\}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C]_{rr} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}\}_r \\ \{\dot{\delta}\}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K]_{rr} & [K]_{rs} \\ [K]_{sr} & [K]_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_r \\ \{\delta\}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_r \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

或展开后得

$$[M]_r\{\ddot{\delta}\}_r + [C]_{rr}\{\dot{\delta}\}_r + [K]_{rr}\{\delta\}_r + [K]_{rs}\{\delta\}_s = \{P\}_r \qquad \text{(b)}$$

$$[K]_{sr}\{\delta\}_r + [K]_{ss}\{\delta\}_s = \{0\} \qquad \text{(c)}$$

式（c）仅表示作用于系统的内力静平衡方程式。由式（c）可得

$$\{\delta\}_s = -[K]_{ss}^{-1}[K]_{sr}\{\delta\}_r \qquad (6.34)$$

将它代入式（b），便变为

$$[M]_r\{\ddot{\delta}\}_r + [C]_{rr}\{\dot{\delta}\}_r + ([K]_{rr} - [K]_{rs}[K]_{ss}^{-1}[K]_{sr})\{\delta\}_r = \{P\}_r \qquad \text{(d)}$$

如果写成$[C]_{rr}=[C]_r$，并令

$$[K]_r = [K]_{rr} - [K]_{rs}[K]_{ss}^{-1}[K]_{sr} \qquad (6.35)$$

便可将式（d）表示成

$$[M]_r\{\ddot{\delta}\}_r + [C]_r\{\dot{\delta}\}_r + [K]_r\{\delta\}_r = \{P\}_r \qquad (6.36)$$

因为取消了从位移，运动方程式的自由度也就相应地减少了。此外，可将式（6.35）右边的第2项表示成$[K]_{sr}^T[K]_{ss}^{-1}[K]_{sr}$，这是矩阵$[K]_{ss}^{-1}$由$[K]_{sr}$作全等变换。

用这种方法来减少系统自由度的作法称为静态减缩，式（6.35）中给出的刚度矩阵叫做减缩刚度矩阵。如果通过解式（6.36）求得主位移，便能按式（6.34）计算从位移。

按6.1.4节的定义，刚度矩阵中的各元素，是将质点各个方向的位移加上约束以后求得的力。与此对应的，减缩刚度矩阵中的各元素，相当于将从位移方向的约束解除以后求得的力。

如上所述，静态减缩的概念是为了减少自由度而对运动方程式（a）的动力分析所作的一种近似假定。但是在实际计算时，可只在式（b）和（c）的虚线范围内实施。因此在实用上，静态减缩可在作动力分析之前按静力方法求解刚度矩阵时进行。

【例题6.6】 对于图6.4中质点系的各质点，只沿x轴方向施加作用力，求减缩刚度矩阵。

〔解〕 因为对质点只沿x方向施加作用力，而没有绕与纸面垂直的y轴旋转的力矩作用，即没有y方向的激振力作用。因此，在系统的六个自由度中，x_1，x_2，x_3为主位移，y_1，y_2，y_3为从位移。按此将它们分离开来，并将位移矢量重新排列成式（6.33）的形式，同时对例题6.1中由式(6.11)求得的刚度矩阵实施相应行间的排列变换，便变为

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ \hline y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} \cdots \left[\begin{array}{ccc|ccc} K_{33}^{xx} & K_{32}^{xx} & K_{31}^{xx} & K_{33}^{xy} & K_{32}^{xy} & K_{31}^{xy} \\ K_{23}^{xx} & K_{22}^{xx} & K_{21}^{xx} & K_{23}^{xy} & K_{22}^{xy} & K_{21}^{xy} \\ K_{13}^{xx} & K_{12}^{xx} & K_{11}^{xx} & K_{13}^{xy} & K_{12}^{xy} & K_{11}^{xy} \\ \hline K_{33}^{yx} & K_{32}^{yx} & K_{31}^{yx} & K_{33}^{yy} & K_{32}^{yy} & K_{31}^{yy} \\ K_{23}^{yx} & K_{22}^{yx} & K_{21}^{yx} & K_{23}^{yy} & K_{22}^{yy} & K_{21}^{yy} \\ K_{13}^{yx} & K_{12}^{yx} & K_{11}^{yx} & K_{13}^{yy} & K_{12}^{yy} & K_{11}^{yy} \end{array}\right]$$

因而，如采用式（a）的分块矩阵记号，便能得到

$$[K]_{rr}=\frac{12EI}{l^3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\quad [K]_{r\theta}=\frac{6EI}{l^2}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$[K]_{\theta r}=\frac{6EI}{l^2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\quad [K]_{\theta\theta}=\frac{2EI}{l}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&4&1\\0&1&4\end{bmatrix}$$

若先求$[K]_{\theta\theta}^{-1}$，由例题5.2的结果，有

$$[K]_{\theta\theta}^{-1}=\frac{l}{52EI}\begin{bmatrix}15&-4&1\\-4&8&-2\\1&-2&7\end{bmatrix}$$

因此得

$$[K]_{r\theta}[K]_{\theta\theta}^{-1}[K]_{\theta r}=\frac{6EI}{l^2}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\frac{l}{52EI}\begin{bmatrix}15&-4&1\\-4&8&-2\\1&-2&7\end{bmatrix}\cdot\frac{6EI}{l^2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{3}{26l}\begin{bmatrix}-11&-4&1\\14&-2&-6\\-4&8&-2\end{bmatrix}\cdot\frac{6EI}{l^2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\frac{9EI}{13l^3}\begin{bmatrix}15&-12&-4\\-12&20&-2\\-4&-2&8\end{bmatrix}$$

把它代入式（6.35）后，就得到如下的减缩刚度矩阵：

$$\begin{aligned}[K]_r&=[K]_{rr}-[K]_{r\theta}[K]_{\theta\theta}^{-1}[K]_{\theta r}\\&=\frac{12EI}{l^3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}-\frac{9EI}{13l^3}\begin{bmatrix}15&-12&-4\\-12&20&-2\\-4&-2&8\end{bmatrix}\\&=\frac{3}{13}\begin{bmatrix}7&-16&12\\-16&44&-46\\12&-46&80\end{bmatrix}\frac{EI}{l^3}\end{aligned}\tag{6.37}$$

【例题6.7】试对例题6.6中的情况证明：减缩刚度矩阵相当于把从位移方向的约束解除以后的刚度矩阵。

〔解〕 对图6.4中的系统，只沿 x 轴方向作用外部激振力时，对主位移方向也即 x 轴方向给以约束，使质点不产生这个方向的位移。而对从位移方向，即绕与纸面垂直的 y 轴旋转的方向，可作自由转动，并对其中一个质点给以沿 x 方向的单位位移。这时，必须加在该质点上的力和为了使其它质点不发生 x 方向的位移所必须加的力，便构成了这一情况下刚度矩阵的各元素。

如图6.8所示，根据简单的连续梁理论，可以容易地求得这些力。其结果为和例题6.6式（6.37）中求得的减缩刚度矩阵是一致的。

$$[K]=\begin{pmatrix}K_{33}^{xx}&K_{32}^{xx}&K_{31}^{xx}\\K_{23}^{xx}&K_{22}^{xx}&K_{21}^{xx}\\K_{13}^{xx}&K_{12}^{xx}&K_{11}^{xx}\end{pmatrix}=\frac{3}{13}\begin{pmatrix}7&-16&12\\-16&44&-46\\12&-46&80\end{pmatrix}\frac{EI}{l^3}$$

6.3.3 减缩自由度举例

现介绍在作建筑物动力分析时，几种常用的减缩自由度的假定，及根据这些假定得到的

典型简化模型。对于有特殊性质的建筑物，或者在作具有特殊目的的分析时，必须分别按照各自相应的特性和目的选择适当的自由度和适当的模型。这种选择应根据设计人员的工程经验来作出判断。

a。刚性楼板假定

一般情况下，与梁柱等构件的刚度相比，建筑物的楼板在其平面内的刚度是非常大的，因此往往假定位于同一楼板层内各节点之间由于拉伸、压缩或剪切变形所产生的相对位移可以忽略不计。这种假定称为刚性楼板假定或平面内刚性楼板假定。

按照刚性楼板的假定，位于同一楼板面内的节点（如图6.9a所示）在xy平面内运动时，可以认为是整块刚性板在作运动，对取楼板的重心为原点得到的坐标轴，该刚性板在x、y、z轴方向的位移为x，y，z。

图6.2(b)所示位于同一楼板内的各节点，本来都该有如图6.9(b)给出的六个自由度，若设该质点在图6.9(a)坐标系内的坐标为（X_i，Y_i，0），那么刚性楼板假定便变成对同一楼板内的所有各质点加上了由约束条件式

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x - Y_i z \\ y_i &= y + X_i z \\ z_i &= z \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

所表示的约束，从而使系统的自由度大幅度地减少。

抵抗由梁的弯曲和剪切变形等产生的楼板出平面变形的刚度并不很大，所以通常需要考虑。而且当楼板绕x和y轴旋转时，由于柱体伸缩能力的差异以及墙体的抗力等，使楼板上的各节点不一定能满足保持几何学上的平面条件。但是，在作动力分析时，认为梁的抗弯刚度极大，假定楼板各节点保持完全的平面是可行的，这种假定称为完全刚性楼板假定。在完全刚性楼板的假定下，如将刚性楼板的位移表示成如图6.9(c)那样，则要求在式（a）中进一步加上如下约束条件

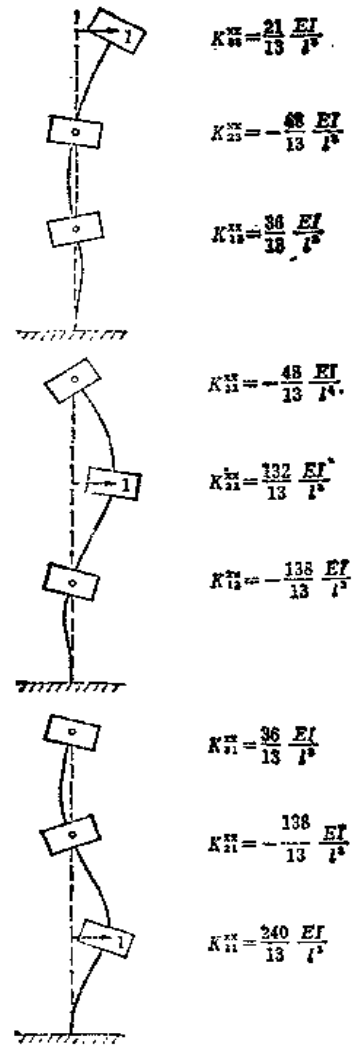


图6.8　容许旋转的刚度系数

$$\left.\begin{aligned} z_i &= z + Y_i \bar{x} - X_i \bar{y} \\ \bar{x}_i &= \bar{x} \\ \bar{y}_i &= \bar{y} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

而且还同时认为，柱体的端部与各节点是完全固定的。

b。水平振动系统

除了专门讨论地震动竖向分量反应问题外，一般假定位于各层楼板的质点重心不产生z方向位移，所以可进一步在式（a）中加上$z=0$的约束条件。这样的系统叫做水平振动系统。

c。扭转振动系统

通常，作用在建筑物楼板上的激振力，作为外力，如图6.10(a)所示，可以认为只有沿

水平轴方向的力P_x和P_y的作用，而没有绕水平轴旋转的力矩$P_{\bar{x}}$和$P_{\bar{y}}$的作用。因此，$\bar{x}$，$\bar{y}$为从位移，可进行静态减缩。静态减缩后，就可如图(b)所示用位移x，y，$\bar{z}$来表示水平振动系统中各层质点的运动。取质点的重心作为坐标轴的原点，这样得到的三个自由度系统称为扭转振动系统，有时也称为空间振动系统。

现在令此质点为质点i，在重心G处给以单位位移，由此求得该质点的自身刚度系数子矩阵为

$$[K_{ii}]=\begin{bmatrix} K_{ii}^{xx} & K_{ii}^{xy} & K_{ii}^{x\bar{z}} \\ K_{ii}^{yx} & K_{ii}^{yy} & K_{ii}^{y\bar{z}} \\ K_{ii}^{\bar{z}x} & K_{ii}^{\bar{z}y} & K_{ii}^{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{c}$$

它们的商

$$\left.\begin{aligned} e_i^x &= K_{ii}^{\bar{z}y}/K_{ii}^{yy} \\ e_i^y &= -K_{ii}^{\bar{z}x}/K_{ii}^{xx} \end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

具有长度的量纲，分别称为沿x轴方向和沿y轴方向的偏心，如图6.10(c)所示，具有位置坐标（e_i^x，e_i^y）的点S称为刚心。某楼层的刚心就是该层水平刚度的重心，因此，对此点沿x，y轴方向加力，质点也不会产生旋转。

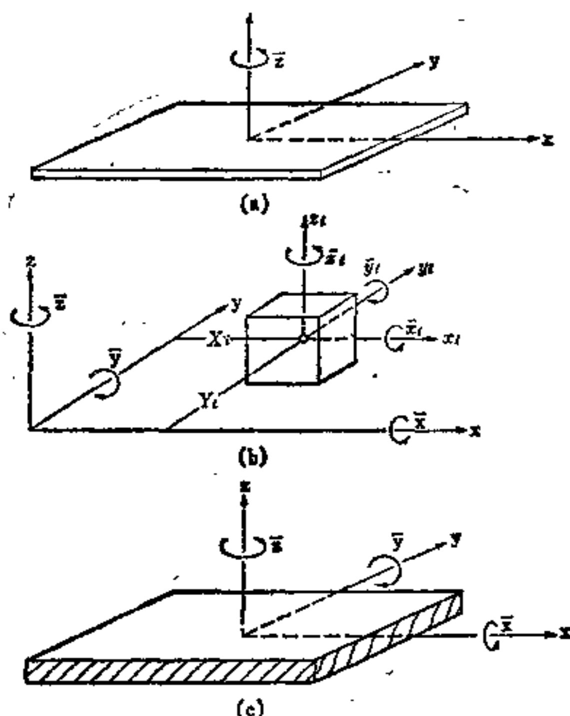


图6.9　刚性楼板假定

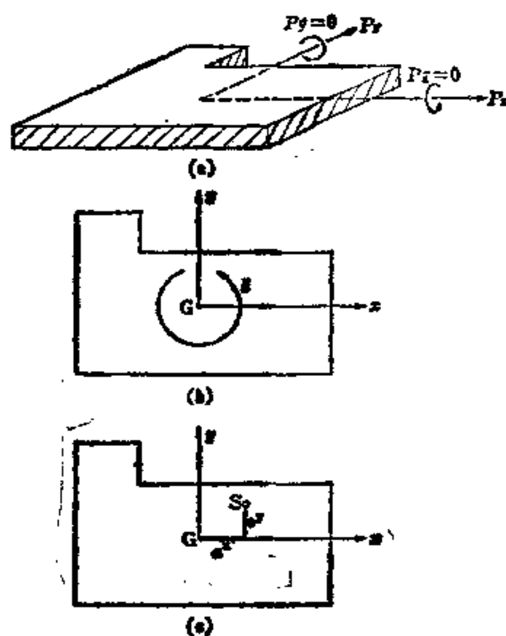


图6.10　扭转振动系统

式（c）子矩阵中的非对角元素K_{ii}^{xy}，K_{ii}^{yx}代表x轴方向的位移与y轴方向位移的耦连。因此，若$K_{ii}^{xy}=K_{ii}^{yx}=0$，则表示两个方向上的位移无耦连。一般说来，式（c）中出现的子矩阵的元素（即刚度系数的值），与坐标轴的选择方法有关。若将原点设在重心保持不动，并试将两个垂直的坐标轴旋转，必定会找到一个方向使$K_{ii}^{xy}=K_{ii}^{yx}=0$。这样的坐标轴方向

称为刚度主轴。

对于多层建筑物，一般各层的重心和刚心并不一定能匀称地位于同一铅垂线上，同样，各层的刚度主轴方向也不一定能限定在同一方向上。可是当所有的构件对互相正交的两个轴平行地配置时，这两个轴的方向必然是刚度主轴。

d. 平面振动系统

当各层的刚度主轴方向都相同时，令其为x，y轴，而且当各层的重心和刚心都一致时，沿两轴方向的位移就互不耦连，也不会发生绕 z 轴的转动，因此系统的运动可以分别在 x－z 平面内和 y－z 平面内独立考虑。对于这一类仅以在 1 个平面内的运动为研究对象的模型称做平面振动系统。

e. 弯曲剪切型

如果在 x－z 平面内分析平面振动系统，对各个质点可以只考虑沿 x 轴方向的位移 x 和绕 y 轴的旋转θ，这样所有各质点都可考虑为具有 x 和θ两个自由度的系统，叫做弯曲剪切型振动系统。

如果弯曲剪切型系统对从位移θ进行静态减缩，其动力分析的方法便和下面要讲的剪切型完全一样。

f. 剪切型

如果忽略柱体的轴向变形，即它的拉伸与压缩变形，并对弯曲剪切型系统施加约束$\theta=0$，便成为剪切型振动系统，所有各质点都只考虑沿水平方向的位移 x。于是系统的自由度等于质点的个数，可以看作最简化的建筑物模型。图6.11所示情况虽称为弯曲剪切型的或剪切型的，但从宏观上看仅表明在层间发生了单纯的相对位移，并不意味着这种相对位移是因层间构件的剪切变形所引起的。这一点和图2.2中所示情况一致。除非有特殊的构造形式，质点间的相对位移往往是由于框架构件的弯曲变形所造成的。

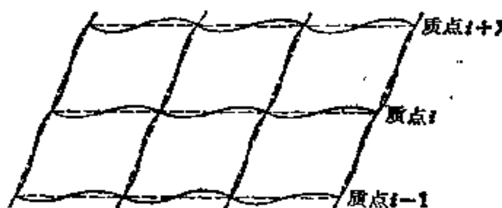


图6.11　构件变形与层间位移

6.4　运动方程式的解

6.4.1　运动方程式

当多质点系统的自由度为 n 时，系统的运动方程为式（6.29）所给出的形式，若经静态减缩后系统的主位移个数为 n，运动方程便如式（6.36）所示，仍属同一类型。因此无论在什么情况下，多质点系统的振动问题可以归结为求解如下的运动方程式

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\} \tag{6.39}$$

式中，$[M]$：质量矩阵；$[C]$：阻尼矩阵；$[K]$：（减缩）刚度矩阵；$\{\ddot{\delta}\}$：加速度矢量；$\{\dot{\delta}\}$：速度矢量；$\{\delta\}$：位移矢量；$\{P\}$：外部激振矢量

上面给出的矩阵和矢量的次数均为 n。此外，一般情况下，矩阵$[C]$和$[K]$为非对角矩阵，因而位移之间存在耦联，式（6.39）为 n 元二次联立方程式。

式（6.39）是最一般的运动方程式，能够适用于所有具有集中参数的线性系统的振动问题。特定系统的特性都体现在系数矩阵$[M]$，$[C]$，$[K]$中，外部激振力不论是何种类型，都由矢量$\{P\}$来表示。但是正如以前提到过的那样，这些矩阵始终具有下列性质，即$[M]$为对

角矩阵，[k]和[C]为对称矩阵，并且[M]和[k]为正定等。

因为式（6.39）为二次常微分方程式，通解中含有$2n$个积分常数，这些常数通常由给出的初始条件，即初始位移矢量$\{\delta(0)\}$和初始速度矢量$\{\dot{\delta}(0)\}$来决定。当激振矢量$\{P\}$为零矢量时，式（6.39）便成为自由振动方程式，而当$\{P\} \neq \{0\}$时便为广义的强迫振动。通常将$\{P\}$为谐和周期性力时的振动称为强迫振动，当$\{P\}$为非谐和力时的系统振动总称为暂态振动。这与第二章和第三章中已经讲过的单质点系统是一样的。

6.4.2 无阻尼自由振动

a. 运动方程式

若令式（6.39）中的$[C]=[0]$，$\{P\}=\{0\}$，就得到无阻尼自由振动方程式

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{0\} \tag{6.40}$$

或对此式前乘位移矩阵[f]，且按式(6.21)有$[f][K]=[I]$，上式便能表示成

$$[f][M]\{\ddot{\delta}\}+\{\delta\}=\{0\} \tag{6.41}$$

若将式（6.40）展开，便有

$$\left.\begin{array}{l} m_1\ddot{\delta}_1+K_{11}\delta_1+K_{12}\delta_2+\cdots\cdots+K_{1n}\delta_n=0 \\ m_2\ddot{\delta}_2+K_{21}\delta_1+K_{22}\delta_2+\cdots\cdots+K_{2n}\delta_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_n\ddot{\delta}_n+K_{n1}\delta_1+K_{n2}\delta_2+\cdots\cdots+K_{nn}\delta_n=0 \end{array}\right\} \tag{a}$$

同样，由式（6.41）可得

$$\left.\begin{array}{l} m_1f_{11}\ddot{\delta}_1+m_2f_{12}\ddot{\delta}_2+\cdots\cdots+m_nf_{1n}\ddot{\delta}_n+\delta_1=0 \\ m_1f_{21}\ddot{\delta}_1+m_2f_{22}\ddot{\delta}_2+\cdots\cdots+m_nf_{2n}\ddot{\delta}_n+\delta_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_1f_{n1}\ddot{\delta}_1+m_2f_{n2}\ddot{\delta}_2+\cdots\cdots+m_nf_{nn}\ddot{\delta}_n+\delta_n=0 \end{array}\right\} \tag{b}$$

如果根据4.2.1节中提到过的结果，式（a）便是静态耦联型的运动方程式，式（b）为动态耦联型的。或者也可将式（a）和式（b）分别称为位移耦联型的和加速度耦联型的运动方程式。

b. 固有频率和振型

现在我们把作为时间t函数的位移$\{\delta(t)\}$表示成振幅矢量$\{u\}$和圆频率为$p(>0)$的谐和振动e^{ipt}的乘积

$$\{\delta\}=\{u\}e^{ipt} \tag{6.42}$$

式中矢量$\{u\}$和标量p为未知量。如将式(6.42)代入式(6.40)，便有$[M]\{u\}(-p^2e^{ipt})+[K]\{u\}e^{ipt}=\{0\}$，即有

$$[K]\{u\}=p^2[M]\{u\} \tag{6.43}$$

式（6.43）就是式（5.45)给出过的固有值问题方程式，不过这里$[A]=[K]$，$[B]=[M]$，$\lambda=p^2$。因此，具有任意n个自由度的质量系统，它的无阻尼自由振动方程式的解，可归结为寻求满足式（6.43）的p和$\{u\}$的固有值问题。而且由于[M]、[K]均为实对称矩阵且又是正定的，故5.5节中的理论完全适用。

把[M]前乘式（6.43），便得

$$[R]\{u\}=p^2\{u\} \tag{c}$$

式中 $$[R]=[M]^{-1}[K]$$

$[M]^{-1}[K]$都是对称矩阵，按定理 2，$[R]$并不一定是对称矩阵。但是如果现在定义$[M]^{\frac{1}{2}}$ $[\sqrt{m_{ii}}]$，式(6.43)能写成$[K]\{u\}=p^2[M]^{\frac{1}{2}}[M]^{\frac{1}{2}}\{u\}$，若再将$[M]^{-\frac{1}{2}}$前乘此式，便为$[M]^{-\frac{1}{2}}[K]\{u\}=p^2[M]^{\frac{1}{2}}\{u\}$，即

$$[M]^{-\frac{1}{2}}[K][M]^{-\frac{1}{2}}[M]^{\frac{1}{2}}\{u\}=p^2[M]^{\frac{1}{2}}\{u\} \tag{d}$$

式中，$[M]^{-\frac{1}{2}}[K][M]^{\frac{1}{2}}$显然是对称矩阵，若采用记号$[S]=[M]^{-\frac{1}{2}}[K](M)^{-\frac{1}{2}}$，$\{v\}=[M]^{\frac{1}{2}}\{u\}$，则式 (d)，也即式(c) 就变为如下形式：

$$[S]\{v\}=p^2\{v\} \tag{6.44}$$

这就变成了所谓实对称矩阵的固有值问题。

式 (6.43) 可进一步写成

$$([K]-p^2[M])\{u\}=\{0\} \tag{6.45}$$

这是关于矢量$\{u\}$的n个分量u_1，u_2，$\cdots u_n$的n元一次齐次联立方程式。当式 (6.45) 满足条件式 (5.48) 给出的公式

$$\det([K]-p^2[M])=0 \tag{6.46}$$

时，就存在非平凡解。式 (6.46) 是关于p^2的n次代数方程式，这就是前面所讲过的求固有值问题的方程式，或称为特征方程式。对于振动问题，因为这方程式是用来决定由式(6.42)所假定的圆频率的，所以也往往叫做频率方程式。

按照定理10，式 (6.46) 具有n个正实根，也即有n个正数p^2为固有值。若令它们的平方根为

$$p=\omega^{(1)},\ \omega^{(2)}\cdots\omega^{(n)} \tag{e}$$

则称$\omega^{(j)}(j=1,\ 2\cdots n)$为系统的固有圆频率。固有圆频率是按其值从小到大的顺序，如式 (e) 那样排列的，其中序号j可称为振型的阶数或固有频率的阶数。而且，将n个固有圆频率数作为主对角元素，按振型阶数的顺序排列成的对角矩阵

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}\omega^{(1)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega^{(2)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{(n)}\end{bmatrix} \tag{6.47}$$

称为频率矩阵。不难理解，矩阵

$$[\Omega^2]=\begin{bmatrix}(\omega^{(1)})^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (\omega^{(2)})^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (\omega^{(n)})^2\end{bmatrix}=[\Omega]^2 \tag{6.48}$$

相当于由式 (5.50) 所定义的谱矩阵。

若将频率方程式 (6.46) 求得的n个固有值分别代入式 (6.45) 以求解固有函数u，就可确定每个振型的固有矢量。

$$\{u^{(j)}\}=\begin{Bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ \vdots \\ u_n^{(j)} \end{Bmatrix} \quad j=1,\ 2\cdots n \tag{6.49}$$

这些固有矢量在代表各振型中各质点的位移振幅，或代表无阻尼系统的振动形态，也即相当于4.1.2节中讲到两质点系时称作的标准振动形或振型。如前面式（5.49）所表示的那样，将全部振型汇总，经排列后得到的矩阵

$$[U]=\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

为振型矩阵。

还有，在对式（6.41）的动态耦连型运动方程式求解时，与式（6.46）相对应的运动方程式便成为

$$\det([I]/p^2-[f][M])=0 \tag{6.51}$$

可由此解得$1/p$

【例题6.8】求图6.12所示五质点系统作剪切型振动时的固有频率、固有函数。

〔解〕 显然，质量矩阵为

$$[M]=\begin{bmatrix} 0.055 & & & & \\ & 0.045 & & & \\ & & 0.045 & & \\ & & & 0.045 & \\ & & & & 0.050 \end{bmatrix} \mathrm{t\cdot s^2/cm} \tag{6.52}$$

由于是剪切振动，可以只考虑x方向的位移和力，其刚度系数如下：

$$K_{55}=k_5 \qquad\qquad K_{45}=-k_5$$
$$K_{44}=k_5+k_4 \quad K_{54}=-k_5 \quad K_{34}=-k_4$$
$$K_{33}=k_4+k_3 \quad K_{43}=-k_4 \quad K_{23}=-k_3$$
$$K_{22}=k_3+k_2 \quad K_{32}=-k_3 \quad K_{12}=-k_2$$
$$K_{11}=k_2+k_1 \quad K_{21}=-k_2$$

其它均为零。(式中刚度系数K^{xx}的上标均已省略)。因此刚度矩阵变为下列形式

$$[K]=\begin{bmatrix} 120 & -120 & & & \\ -120 & 270 & -150 & & \\ & -150 & 330 & -180 & \\ & & -180 & 390 & -210 \\ & & & -210 & 420 \end{bmatrix} \mathrm{t/cm} \tag{6.53}$$

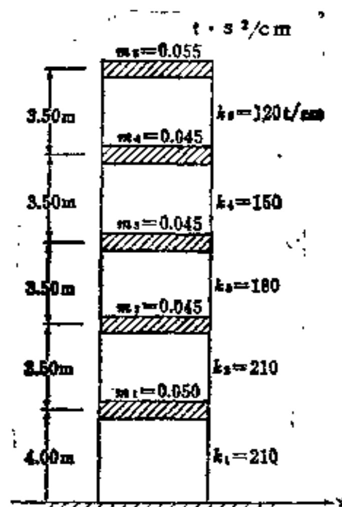


图6.12 五质点系统的例子

把式（6.52）和（6.53）代入式（6.43）的固有值问题方程式，得到的解便是所求的固有值p^2和固有函数。其结果为

$(p^{(1)})^2 = 313.8 \quad (p^{(2)})^2 = 2250.9 \quad (p^{(3)})^2 = 5661.3 \quad (p^{(4)})^2 = 9784.9 \quad (p^{(5)})^2 = 14570.5$

$u_5^{(1)} = 0.6426 \quad u_5^{(2)} = -0.5529 \quad u_5^{(3)} = -0.3689 \quad u_5^{(4)} = -0.1749 \quad u_5^{(5)} = 0.0349$

$u_4^{(1)} = 0.5502 \quad u_4^{(2)} = 0.0175 \quad u_4^{(3)} = 0.5883 \quad u_4^{(4)} = 0.6096 \quad u_4^{(5)} = -0.1979$

$u_3^{(1)} = 0.4244 \quad u_3^{(2)} = 0.4620 \quad u_3^{(3)} = 0.3549 \quad u_3^{(4)} = -0.5522 \quad u_3^{(5)} = 0.4810$

$u_2^{(1)} = 0.2864 \quad u_2^{(2)} = 0.5724 \quad u_2^{(3)} = -0.3419 \quad u_2^{(4)} = -0.1695 \quad u_2^{(5)} = -0.7054$

$u_1^{(1)} = 0.1487 \quad u_1^{(2)} = 0.3910 \quad u_1^{(3)} = -0.5244 \quad u_1^{(4)} = 0.5140 \quad u_1^{(5)} = 0.4802$

若这里的各阶固有函数值，也即固有矢量值，全部以1为模数，便可求得标准化后的固有函数值。如求与此对应的各阶固有圆频率、固有频率、固有周期，便可得到如表6.1中所示的结果。

表6.1　　固有频率

阶数 j	固有圆频率 $\omega^{(j)}$ (rad/s)	固有频率 $\nu^{(j)}$ (Hz)	周期 $T^{(j)}$ (s)
1	17.71	2.82	0.355
2	47.44	7.55	0.132
3	75.24	11.97	0.084
4	98.92	15.74	0.064
5	120.71	19.21	0.052

将固有值和固有函数分别汇总，便可获得下列形式的谱矩阵和振型矩阵：

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} 313.8 & & & & \\ & 2250.9 & & & \\ & & 5661.3 & & \\ & & & 9784.9 & \\ & & & & 14570.5 \end{bmatrix} \tag{6.54}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 0.6426 & -0.5529 & -0.3689 & -0.1749 & 0.0349 \\ 0.5502 & 0.0175 & 0.5883 & 0.6096 & -0.1979 \\ 0.4244 & 0.4620 & 0.3549 & -0.5522 & 0.4810 \\ 0.2864 & 0.5724 & -0.3419 & -0.1695 & -0.7054 \\ 0.1487 & 0.3910 & -0.5244 & 0.5140 & 0.4802 \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

注意，从这个例题开始的以后一系列例题中，质点的序号是根据它们离地面的高度，从高到低按 $i=5, 4, 3, 2, 1$ 编号的。但是振型的阶数序仍以 $j=1, 2, 3, 4, 5$ 为序。

c. 振型的标准化

固有函数 u 的联立方程式（6.45）的右边全为零，是齐次方程式，对此求得的解，只是固有矢量各个分量的比值，而它们的绝对值，即它们的模，尚不能确定。若运动的初始条件已经给定，便能确定固有函数的绝对值，4.1.2节中讲过的两质点系统就是一例。

然而在有些场合，并不关心具体的初始条件，作为系统的一般特性之一，只需画出各阶振型。这时为了方便，可对振型实施标准化。标准化的方法有许多种，这里只介绍认为是最合理的参与系数法。

现令 $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \cdots \beta^{(n)}$ 为 n 个系数，并把它们表示成矢量形式，$\{\beta\} = \{\beta^{(1)}\ \beta^{(2)} \cdots \beta^{(n)}\}^T$，

* 这里所讲的标准化，与3.4.3节所述意义稍有不同。

根据它与振型矩阵的积为

$$[U]\{\beta\}=\{1\} \tag{6.56}$$

来决定$\{\beta\}$。如果将式（6.56）与式（5.57）进行比较，便可明白$\{\beta\}$相当于将单位矢量$\{1\}$按固有矢量展开时的振型的系数。因此在式（5.58）或（5.59）中，令$[B]=[M]$，$\{x\}=\{1\}$，于是$\{\beta\}$为

$$\{\beta\}=([U]^T[M][U])^{-1}[U]^T[M]\{1\} \tag{6.57}$$

或

$$\beta^{(j)}=\frac{\{u^{(j)}\}^T[M]\{1\}}{\{u^{(j)}\}^T[M]\{u^{(j)}\}} \tag{6.58}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^{(j)}}{\sum_{i=1}^{n} m_i (u_i^{(j)})^2} \tag{6.59}$$

对这样的系数$\beta^{(j)}$（$j=1, 2\cdots n$），经乘以相应阶数的振型矢量后得到的矢量

$$\{\beta^{(j)}u^{(j)}\}=\begin{Bmatrix}\beta^{(j)}u_1^{(j)}\\ \beta^{(j)}u_2^{(j)}\\ \vdots\\ \beta^{(j)}u_n^{(j)}\end{Bmatrix} \tag{6.60}$$

便称为参与函数矢量，而且把系数$\beta^{(j)}$称为第j阶参与系数，把参与函数矢量的第i个元素$\beta^{(j)}u_i^{(j)}$叫做与位移δ_i有关的第j阶参与函数。但是必须注意，参与系数$\beta^{(j)}$是以位移δ的单位的倒数为单位取值的，而且其数值也随所选振型矢量模的选法而异。

与此相比，参与函数是无量纲的量，对于只确定比值的固有函数，可以按式（6.56）的条件去确定其值。因此可以有效地用于振型的图形表示，意义完全相同。若进一步展开式（6.56），便有

$$\beta^{(1)}u_i^{(1)}+\beta^{(2)}u_i^{(2)}+\cdots+\beta^{(n)}u_i^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\beta^{(j)}u_i^{(j)}=1$$

$$i=1, 2\cdots n \tag{6.61}$$

这样，就得到下述定理。

【定理13】 对于任意位移的全部参与系数之总和总等于1。

此定理对于校核固有值的计算结果是大有用处的。

但是这里所讲的振型矢量的标准化，单纯是为了方便，而并不改变振动分析的本质。因此振型矩阵的各列元素值只要保持由式（6.45）确定的比值，不管模取什么值都不会给以后的分析工作带来困难。

各振型曲线与代表中性位置的轴线相交的点，也即当只考虑各单个振型时那些不作运动的点，称为该振型的节点，第j阶振型有$j-1$个节点。与节点情况不同，位于两个节点之间振幅达极大的点称为腹；这已是众所周知的了。

【例题6.9】 试求例题4.1中两质点系统的参与函数。

〔解〕 已知$m_2=0.055$，$m_1=0.050\text{t}\cdot\text{s}^2/\text{cm}$，由例题4.3已求得振幅比$\eta^{(1)}=u_2^{(1)}/u_1^{(1)}=1.644$，$\eta^{(2)}=u_2^{(2)}/u_1^{(2)}=-0.553$，现在若令$u_1^{(1)}=u_1^{(2)}=1$，则固有函数为

$$u_2^{(1)}=1.644 \qquad u_2^{(2)}=-0.553$$
$$u_1^{(1)}=1.000 \qquad u_1^{(2)}=1.000$$

将这些值代入式（6.59），得参与系数

$$\beta^{(1)}=[0.055\times1.644+0.050\times1.000]/[0.055\times(1.644)^2+0.050\times(1.000)^2]$$
$$=0.1404/0.1986=0.707$$
$$\beta^{(2)}=[0.055\times(-0.553)\times0.050\times1.000]/[0.055\times(-0.553)^2+0.050\times(1.000)^2]$$
$$=0.0196/0.0668=0.293$$

由此求得如下参与函数：

$$\left.\begin{aligned}\beta^{(1)}u_2^{(1)}=1.162 \qquad \beta^{(2)}u_2^{(2)}=-0.162\\ \beta^{(1)}u_1^{(1)}=0.707 \qquad \beta^{(2)}u_1^{(2)}=0.293\end{aligned}\right\} \tag{6.62}$$

【例题6.10】 用图按振型函数表示例题6.8中给出的系统振型，并证明定理13成立。

〔解〕 由例题6.8式（6.55）有

$$[U]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.6426 & 0.5502 & 0.4244 & 0.2864 & 0.1487\\ -0.5529 & 0.0175 & 0.4620 & 0.5724 & 0.3910\\ -0.3689 & 0.5883 & 0.3549 & -0.3419 & -0.5244\\ -0.1749 & 0.6096 & -0.5522 & -0.1695 & 0.5140\\ 0.0349 & -0.1979 & 0.4810 & -0.7054 & 0.4802\end{bmatrix} \tag{6.63}$$

将式（6.63）和（6.52）先后代入式（6.57）得

$$[U]^{\mathrm{T}}[M]=\begin{bmatrix}0.03534 & 0.02476 & 0.01910 & 0.01289 & 0.00744\\ -0.03041 & 0.00079 & 0.02079 & 0.02576 & 0.01955\\ -0.02029 & 0.02647 & 0.01597 & -0.01539 & -0.02622\\ -0.00962 & 0.02743 & -0.02485 & -0.00763 & 0.02570\\ 0.00192 & -0.00891 & 0.02165 & -0.03174 & 0.02401\end{bmatrix}$$

$$[U]^{\mathrm{T}}[M][U]=\begin{bmatrix}0.04924 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000\\ 0.00000 & 0.04882 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000\\ 0.00000 & 0.00000 & 0.04774 & 0.00000 & 0.00000\\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.04663 & 0.00000\\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00001 & 0.04616\end{bmatrix} \tag{6.64}$$

$$\therefore \quad ([U]^{\mathrm{T}}[M][U])^{-1}[U]^{\mathrm{T}}[M]$$

$$=\begin{bmatrix}0.7178 & 0.5028 & 0.3879 & 0.2617 & 0.1510\\ -0.6229 & 0.0161 & 0.4258 & 0.5276 & 0.4004\\ -0.4250 & 0.5546 & 0.3345 & -0.3223 & -0.5492\\ -0.2063 & 0.5883 & -0.5330 & -0.1636 & 0.5511\\ 0.0415 & -0.1930 & 0.4689 & -0.6876 & 0.5200\end{bmatrix} \tag{6.65}$$

$$\therefore \quad \{\beta\}=([T]^{\mathrm{T}}[M][U])^{-1}[U]^{\mathrm{T}}[M]\{1\}=\begin{bmatrix}2.021\\ 0.747\\ -0.407\\ 0.237\\ 0.150\end{bmatrix} \tag{6.66}$$

把式（6.66）所示矢量$\{\beta\}$的各个分量，即各阶参与系数$\beta^{(j)}$乘以式（6.55）所示的在振型矩阵中各自对应的列，便可将求得的矩阵$[\beta U]$表示成

$$
[\beta U]=\begin{bmatrix} 1.2990 & -0.4131 & 0.1503 & -0.0414 & 0.0052 \\ 1.1121 & 0.0131 & -0.2397 & 0.1442 & -0.0297 \\ 0.8579 & 0.3452 & -0.1446 & -0.1306 & 0.0721 \\ 0.5788 & 0.4277 & 0.1393 & -0.0401 & -0.1058 \\ 0.3006 & 0.2921 & 0.2137 & 0.1216 & 0.0720 \end{bmatrix} \tag{6.67}
$$

该矩阵中的各列就是各阶参与函数，即经标准化后的振型，如用图形表示便如图6.13所示。若要计算式（6.55）与式（6.66）之积，也即式（6.56）中的左边部分，自然得到由

$$
[U]\{\beta\}=\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{Bmatrix}
$$

表示的单位矢量，由此证明了定理13的成立。如采用图6.13所表示的参与函数值，直接计算式(6.61)，也可得到

$$
\begin{aligned}
1.299-0.413+0.150-0.041+0.005&=1.00\\
1.112+0.013-0.240+0.144-0.030&=1.00\\
0.858+0.345-0.145-0.131+0.072&=1.00\\
0.579+0.428+0.139-0.040-0.106&=1.00\\
0.301+0.292+0.214+0.122+0.072&=1.00
\end{aligned}
$$

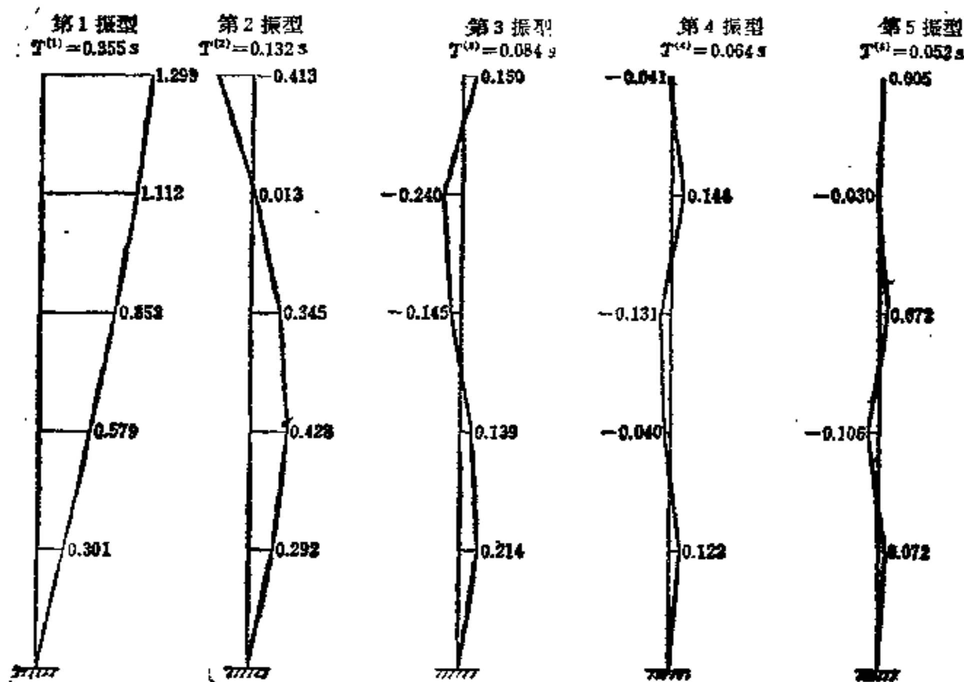


图6.13　振型图示例

6.4.3 无阻尼暂态振动

a. 运动方程式

若在式（6.39）中令$[C]=[0]$，$\{P\}\neq\{0\}$，便得到无阻尼系统的广义强迫振动方程式

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\} \tag{6.68}$$

式中$\{P\}$通常为时间过程，即由$\{P(t)\}$给定的激振力矢量，问题便成为求系统在这一类激振力作用下的反应。

前面讲过，一般情况下刚度矩阵$[K]$是非对角矩阵，因为有非对角元素的介入，就会出现静态耦联，式（6.68）便变成了联立微分方程式。但是$P(t)$为已知的时间过程，只要初始条件给定，就可以用直接积分法来求解联立微分方程式，这样的分析方法称为直接积分法。通常取初始条件为$\{\dot{\delta}\}=\{0\}$，$\{\delta\}=\{0\}$，表示系统从静止状态开始运动。

b. 运动方程式的解耦

虽然可以采用直接积分法求解，但如果在运动方程式中没有耦联时，分析工作自然就变得十分容易。有没有耦联与选择位移坐标的方法有关，只要坐标选得适当，耦联便可能消失，犹如4.2.2节中列举的两质点系统例子那样。对于无阻尼多质点系统，常常有可能使这类运动方程式解耦，为此，可以利用定理12和5.5.3节中叙述过的方法将任意矢量按固有矢量展开。

首先考虑运动方程式（6.68）右边$\{P\}=\{0\}$时的自由振动情况，如前所述可求得如式（6.49）给出的1阶乃至n阶固有矢量。将它们归纳汇总后可表示成如式（6.50)所示的矩阵$[U]$，即式（5.49）给出的固有值问题方程式中的振型矩阵。仿效式（5.57），若设

$$\{\delta\}=[U]\{q\} \tag{6.69}$$

便与式（5.57）一样，把位移矢量$\{\delta\}$按固有矢量展开。因为矢量$\{q\}$的诸分量即振型系数，若把它看作新的广义坐标，式（6.69）便表示从坐标$\{\delta\}$变换为坐标$\{q\}$。若对式（6.69）施行逆变换，由式（5.58），可表示为

$$\{q\}=([U]^{T}[M][U])^{-1}[U]^{T}[M]\{\delta\} \tag{6.70}$$

将式（6.69）代入受到激振作用的运动方程式（6.68）中，得

$$[M][U]\{\ddot{q}\}+[K][U]\{q\}=\{P\}$$

前乘$[U]^{T}$，变为

$$[U]^{T}[M][U]\{\ddot{q}\}+[U]^{T}[K][U]\{q\}=[U]^{T}\{P\} \tag{6.71}$$

根据定理12，此处的$[U]^{T}[M][U]$，$[U]^{T}[K][U]$都是对角矩阵。因此，式（6.71）成为坐标之间无耦联的运动方程式。即只要施行式（6.69）的坐标变换，便可使运动方程式得到解耦。因此坐标$\{q\}$成为正则坐标。

现若将对角矩阵$[U]^{T}[M][U]$，$[U]^{T}[K][U]$的主对角元素和矢量$[U]^{T}\{P\}$的元素表示成

$$[U]^{T}[M][U]=\begin{bmatrix} M^{(1)} & & & \\ & M^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M^{(n)} \end{bmatrix} \qquad [U]^{T}[K][U]=\begin{bmatrix} K^{(1)} & & & \\ & K^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$[U]^T\{P\}=\begin{Bmatrix}P^{(1)}\\P^{(2)}\\\vdots\\P^{(n)}\end{Bmatrix}$$

式（6.71）便成为n个独立的微分方程式

$$M^{(j)}\ddot{q}^{(j)}+K^{(j)}q^{(j)}=P^{(j)}\qquad j=1,\ 2\cdots n \tag{6.72}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}M^{(j)}&=\{u^{(j)}\}^T[M]\{u^{(j)}\}\\K^{(j)}&=\{u^{(j)}\}^T[K]\{u^{(j)}\}\\P^{(j)}&=\{u^{(j)}\}^T\{p\}\end{aligned}\right\} \tag{6.73}$$

分别把由式（6.73）所定义的$M^{(j)}$，$K^{(j)}$，$P^{(j)}$（$j=1,\ 2,\ \cdots n$）称为第j次正则质量、正则弹簧常数和正则激振力。

若对式（5.52），也就是这里的

$$[K][U]=[M][U][\Omega^2] \tag{6.74}$$

前乘以$[U]^T$，得

$$[U]^T[K][U]=[U]^T[M][U][\Omega^2]=[M^{(j)}][\Omega^2] \tag{6.75}$$

即有关系式

$$[K^{(j)}]=[M^{(j)}][(\omega^{(j)})^2]$$

所以

$$K^{(j)}/M^{(j)}=(\omega^{(j)})^2\qquad j=1,\ 2\cdots n \tag{6.76}$$

因此式（6.72）可写成形如

$$\ddot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=P^{(j)}/M^{(j)}\quad j=1,\ 2\cdots n \tag{6.77}$$

的方程。

式（6.72）或（6.77）是关于函数$q^{(j)}(t)$的二阶线性常系数微分方程式，采用单质点系统中讲过的方法，便不难求解。因此，按式（6.69）作坐标变换使运动方程式解耦，可以视作把多质点系统问题还原成单质点系统问题。

如果求得$q^{(j)}$（$j=1,\ 2\cdots n$）即矢量$\{q\}$，便可按式（6.69）确定实际的变位$\{\delta\}$，对本节所讲的无阻尼系统情形，这就是运动方程式（6.68）的正确解。

【例题6.11】 试证定理12对例题6.8中的系统成立，求其正则质量和正则弹簧常数。并证式（6.76）也成立。

〔解〕 $[U]^T[M][U]$的计算结果已在式(6.64)中求得，对$[U]^T[K][U]$进行计算，得

$$[U]^T[K][U]=\begin{bmatrix}15.453&0.000&0.000&0.000&0.000\\0.000&109.892&0.000&0.000&0.000\\0.000&0.000&270.249&0.000&0.000\\0.000&0.000&0.000&456.245&0.000\\0.000&0.000&0.000&0.000&672.653\end{bmatrix} \tag{6.78}$$

也是对角矩阵。

按式（6.64）和（6.78），求$M^{(j)}$，$K^{(j)}$，$K^{(j)}/M^{(j)}$（$j=1,\ 2\cdots 5$），结果为

阶数 j	$M^{(j)}$	$K^{(j)}$	$K^{(j)}/M^{(j)}$
1	0.04924	15.453	313.8
2	0.04882	109.892	2251
3	0.04774	270.249	5661
4	0.04663	456.245	9784
5	0.04616	672.653	14572

(6.79)

可见，$K^{(j)}/M^{(j)}$值与式（6.54）所示的$(\omega^{(j)})^2$值在小量的计算误差范围内是相等的。

令M是系统的总质量，显然有$M=m_1+m_2+\cdots+m_n$，若令各质点的质量组成矢量$\{m\}=\{m_1\ m_2\cdots m_n\}^T$，则它与单位矢量的内积可表示为

$$M=\{m\}^T\{1\} \tag{a}$$

若将式（6.56）代入式(a)中的{1}，变为

$$M=\{m\}^T[U]\{\beta\}=\beta^{(1)}\sum_{i=1}^{n}m_iu_i^{(1)}+\beta^{(2)}\sum_{i=1}^{n}m_iu_i^{(2)}+\cdots+\beta^{(n)}\sum_{i=1}^{n}m_iu_i^{(n)}$$

令

$$\bar{M}^{(j)}=\beta^{(j)}\sum_{i=1}^{n}m_iu_i^{(j)} \tag{b}$$

式（a）可表示为

$$M=\bar{M}^{(1)}+\bar{M}^{(2)}+\cdots+\bar{M}^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\bar{M}^{(j)} \tag{6.80}$$

进而将式（6.59）代入式(b)的$\beta^{(j)}$，有

$$\bar{M}^{(j)}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}m_iu_i^{(j)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}m_i(u_i^{(j)})^2} \tag{6.81}$$

称$\bar{M}^{(j)}$为各阶的有效质量。如式（6.80）所示，所有振型阶数的有效质量之和等于系统的总质量。不同于式（6.73）中定义的正则质量取决于振型矢量之模，有效质量是不随模而变的确定值，代表全部质量在各阶振型中所占的比例。

【例题6.12】 对例题6.8中的系统求各阶有效质量，并证明式（6.80）成立。

〔解〕 若按式（6.59），可将式（6.81）改写成

$$\bar{M}^{(j)}=(\beta^{(j)})^2\sum_{i=1}^{n}m_i(u_i^{(j)})^2$$

$\beta^{(j)}$已在式(6.66)中求得；$\sum_{i=1}^{n}m_i(u_i^{(j)})^2$是式（6.64）中的主对角元素，也均已求出，所以有效质量为（单位：$t\cdot s^2/cm$）

$$\bar{M}^{(1)}=(\ \ 2.021)^2\times0.04924=0.201$$
$$\bar{M}^{(2)}=(\ \ 0.747)^2\times0.04882=0.027$$
$$\bar{M}^{(3)}=(-0.407)^2\times0.04774=0.008$$
$$\bar{M}^{(4)}=(\ \ 0.237)^2\times0.04663=0.003$$
$$\bar{M}^{(5)}=(\ \ 0.150)^2\times0.04616=0.001$$

由于有$M=0.055+3\times0.045+0.050=0.240$，而

$$\sum_{j=1}^{n}M^{(j)}=0.201+0.027+0.008+0.003+0.001=0.24$$

这就证明了有效质量的总和等于系统的总质量。

6.4.4 有阻尼振动

a. 运动方程式

有阻尼的多质点系统的运动方程式，如式（6.39）中给出的那样，为

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\} \tag{6.82}$$

除了刚度矩阵中有非对角元素出现位移耦联外，还因为阻尼矩阵中的非对角元素而存在速度耦联。此外，§6.1.7中已经提到，因为阻尼矩阵的元素不能直接决定，即使已经给定激振矢量$\{P\}$和初始条件，也不能像求解无阻尼系统的式（6.68）那样，用直接积分法去求解式（6.82）。

b. 使运动方程式解耦的假定

设$[U]$为对无阻尼自由振动方程式（6.40）求解得到的振型矩阵。和对式（6.69）及（6.70）一样作下列坐标变换：

$$\{\delta\}=[U]\{q\} \tag{a}$$

$$\{q\}=([U]^{T}[M][U])^{-1}[U]^{T}[M]\{\delta\} \tag{b}$$

若将式(a)代入式（6.82），有

$$[M][U]\{\ddot{q}\}+[C][U]\{\dot{q}\}+[K][U]\{q\}=\{P\} \tag{c}$$

用$[U]^{T}$前乘式(c)，可得

$$[U]^{T}[M][U]\{\ddot{q}\}+[U]^{T}[C][C]\{\dot{q}\}+[U]^{T}[K][U]\{q\}=[U]^{T}\{P\} \tag{6.83}$$

按照定理12，式（6.83）左侧的$[U]^{T}[M][U]$和$[U]^{T}[K][U]$为对角矩阵，但是与阻尼有关的三重积$[U]^{T}[C][U]$一般说来却不能保证是对角矩阵。事实上，不具备某种条件，$[U]^{T}[C][U]$便不能变成对角矩阵。因此虽然在式（6.83）中没有质量的耦联，也没有位移的耦联，却依然存在速度的耦联，不能对全部坐标实行解耦。这意味着当系统存在阻尼时，按式(b)定义的坐标$q^{(j)}$($j=1, 2\cdots n$)通常并不是正则坐标。

但是为了分析方便，往往假定可以忽略式（6.83）中的速度耦联项，而把$[U]^{T}[C][U]$看作是对角矩阵。这种关于阻尼的假定称为解耦假定。

这个假定可以表达成

$$[U]^{T}[C][U]=\begin{bmatrix}C^{(1)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & C^{(2)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & C^{(n)}\end{bmatrix} \tag{6.84}$$

主对角元素是

$$C^{(j)}=[u^{(j)}]^{T}[C]\{u^{(j)}\} \qquad j=1, 2\cdots n \tag{6.85}$$

并称$C^{(j)}$为第j阶正则阻尼系数。若参照式（6.73），可把多质点系统阻尼振动的运动方程式表示成

$$M^{(j)}\ddot{q}^{(j)}+C^{(j)}\dot{q}^{(j)}+K^{(j)}q^{(j)}=P^{(j)} \qquad j=1, 2\cdots n \tag{6.86}$$

式中

$M^{(j)}$：正则质量　　　　$C^{(j)}$：正则阻尼系数

$K^{(j)}$：正则弹簧常数　　　$P^{(j)}$：正则激振力

式（6.86）是按振型分解的n个独立的线性常系数二阶常微分方程式。立刻可以看出，它们和式（2.70）所表示的单质点系统的运动方程式在形式上完全相同。若令$\omega^{(j)}$为第j阶振型（$j=1$，$2\cdots n$）的固有圆频率，则与式（2.72）中的第1式相对应，有如式（6.76）所表示的关系$K^{(j)}/M^{(j)}=(\omega^{(j)})^2$。并且参照式（2.72）中的第2式，即$c=2h\bar{\omega}m$，可取正则阻尼系数如下式所示

$$C^{(j)}=2h^{(j)}\omega^{(j)}M^{(j)} \tag{6.87}$$

并把$h^{(j)}$叫做第j阶振型阻尼比。遵照式（6.87）的表示，可以假定式（6.84）具有如下形式：

$$[U]^T[C][U]=\begin{Bmatrix} M^{(1)} & & & \\ & M^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M^{(n)} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2h^{(1)}\omega^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2h^{(2)}\omega^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2h^{(n)}\omega^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{6.88}$$

以$M^{(j)}$除以式（6.86），各振型的运动方程式为

$$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=P^{(j)}/M^{(j)} \tag{6.89}$$

这和单质点系统方程式〔如式（3.87）〕在形式上是完全相同的。

6.4.5　用直接积分法求解

回到运动方程式(6.82)，〔M〕和〔K〕可由系统的特性直接决定。关于阻尼矩阵〔C〕，如上所述，假定已经解耦，便有式（6.88）成立，为简单起见，令

$$\begin{bmatrix} M^{(1)} & & & \\ & M^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M^{(n)} \end{bmatrix}=[M^{(j)}] \qquad \begin{bmatrix} 2h^{(1)}\omega^{(1)} & & & \\ & 2h^{(2)}\omega^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2h^{(n)}\omega^{(n)} \end{bmatrix}=[D] \tag{6.90}$$

式（6.88）成为

$$[U]^T[C][U]=[M^{(j)}][D] \tag{a}$$

式中

$$[M^{(j)}]=[U]^T[M][U] \tag{b}$$

〔$M^{(j)}$〕是已经确定的矩阵，因为$\omega^{(j)}$为已知，如果$h^{(j)}$给定适当的值（参见7.2节），则〔D〕也就确定了。

现在对式（a）的两边用$([U]^T)^{-1}$前乘和用$[U]^{-1}$后乘，于是有

$$([U]^T)^{-1}[U]^T[C][U][U]^{-1}=([U]^T)^{-1}[M^{(j)}][D][U]^{-1} \tag{c}$$

由式（b）得

$$([U]^T)^{-1}[M^{(j)}]=[M][U]$$

$$[M^{(j)}][U]^{-1}=[U]^T[M]$$

$$\therefore\quad [U]^{-1}=[M^{(j)}]^{-1}[U]^T[M]$$

将这些式子代入式(c)的右边，得到

$$([U]^T)^{-1}[U]^T[C][U][U]^{-1}=[M][U][D][M^{(j)}]^{-1}[U]^T[M]$$

即

$$[C]=[M][U][D][M^{(j)}]^{-1}[U]^T[M] \tag{6.91}$$

于是，联立微分方程式(6.82)的全部系数都已决定。因此当激振力$\{P\}$的时间过程给定，并给出初始条件，如$\{\delta(0)\}=\{0\}$，$\{\dot{\delta}(0)\}=\{0\}$，便可按直接积分法求解式(6.82)。这时阻尼矩阵中的各元素是按式(6.91)算出，它只满足使方程解耦的假定，而已经不再具有原来按式(6.23)所定义的作为阻尼影响系数的明确物理意义。

【例题6.13】 对于例题6.8中的系统，当各阶振型阻尼比均为5%时，求阻尼矩阵。

〔解〕 因为$h^{(j)}=0.05(j=1,2\cdots5)$，利用例题6.8中求得的$\omega^{(j)}$之值计算$2h^{(j)}\omega^{(j)}$，则式(6.90)中的$[D]$可变为

$$[D]=\begin{bmatrix}1.771 & & & & \\ & 4.744 & & & \\ & & 7.524 & & \\ & & & 9.892 & \\ & & & & 12.071\end{bmatrix} \tag{6.92}$$

然后将式(6.52)中的$[M]$，式(6.55)中的$[U]$，上面给出的$[D]$和式(6.65)中的$[M^{(j)}]^{-1}[U]^T[M]$，依次代入式(6.91)，求得阻尼矩阵（单位：t·s/cm）为

$$[C]=\begin{bmatrix}0.220 & -0.116 & -0.027 & -0.011 & -0.005\\ -0.116 & 0.313 & -0.110 & -0.021 & -0.008\\ -0.027 & -0.110 & 0.349 & -0.117 & -0.021\\ -0.011 & -0.021 & -0.117 & 0.384 & -0.125\\ -0.005 & -0.008 & -0.021 & -0.125 & 0.438\end{bmatrix} \tag{6.93}$$

6.4.6 用振型叠加法求解

a. 单质点阻尼系统

参考第三章中讲过的在任意激振力作用下单质点有阻尼系统的运动方程式和其解，归纳后重新写出如下：

运动方程式

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=P(t)/m \tag{a}$$

自由振动解：$P(t)=0$

$$x=e^{-h\bar{\omega}t}\left[x(0)\cos\bar{\omega}_dt+\frac{h\bar{\omega}x(0)+\dot{x}(0)}{\bar{\omega}_d}\sin\bar{\omega}_dt\right] \tag{b}$$

$$\bar{\omega}_d=\sqrt{1-h^2}\cdot\bar{\omega}$$

暂态振动解（时程分析）

$$x=\frac{1}{m\bar{\omega}_d}\int_0^t P(\tau)e^{-h\bar{\omega}(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_d(t-\tau)d\tau \tag{c}$$

暂态振动解（频谱分析）

$$x=\frac{1}{2\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{\omega}^2-\omega^2+2ih\bar{\omega}\omega}\mathscr{F}[P(t)]e^{i\omega t}d\omega \tag{d}$$

b. 多质点阻尼系统

对多质点阻尼系统，按式(6.69)和(6.70)所示那样实施坐标变换

$$\{\delta\}=[U]\{q\} \tag{e}$$

$$\{q\}=([U]^{T}[M][U])^{-1}[U]^{T}[M]\{\delta\} \tag{f}$$

即

$$\delta_i(t)=\sum_{j=1}^{n} u_i^{(j)}q^{(j)}(t) \qquad i=1, 2\cdots n \tag{g}$$

就得到形如式(6.89)的各个振型下关于$q^{(j)}$的运动微分方程式

$$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=P^{(j)}(t)/M^{(j)} \tag{h}$$

它与式(a)有完全相同的形式，因此它的解当然也与式(b)、(c)和(d)的形式相同，可以列出如下。

自由振动解

$$q^{(j)}=e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}t}\left[q^{(j)}(0)\cos\omega_d^{(j)}t+\frac{h^{(j)}\omega^{(j)}q^{(j)}(0)+\dot{q}^{(j)}(0)}{\omega_d^{(j)}}\sin\omega_d^{(j)}t\right]$$

$$\omega_d^{(j)}=\sqrt{1-(h^{(j)})^2}\,\omega^{(j)}$$

式中的$q^{(j)}(0)$，$\dot{q}^{(j)}(0)$按式(f)应为下列矢量中的各个分量

$$\{q(0)\}=\frac{[U]^{T}[M]}{[U]^{T}[M][U]}\{\delta(0)\} \qquad \{\dot{q}(0)\}=\frac{[U]^{T}[M]}{[U]^{T}[M][U]}\{\dot{\delta}(0)\}$$

暂态振动解（时程分析）

$$q^{(j)}=\frac{1}{M^{(j)}\omega_d^{(j)}}\int_0^t P^{(j)}(\tau)e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}(t-\tau)}\sin\omega_d^{(j)}(t-\tau)d\tau \tag{6.94}$$

暂态振动解（频谱分析）

$$q^{(j)}=\frac{1}{2\pi M^{(j)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^{(j)})^2-\omega^2+2ih^{(j)}\omega^{(j)}\omega}\mathscr{F}[P^{(j)}(t)]e^{i\omega t}d\omega \tag{6.95}$$

式中$\mathscr{F}[P^{(j)}(t)]$为正则激振力的富里叶变换。

c. 振型叠加法

在按上述方法求得关于各阶振型的正则坐标$q^{(j)}$（$j=1, 2\cdots n$）后，只要按式(e)或(g)所示，把各振型解$q^{(j)}$叠加起来，便可求得系统的实际位移δ_i（$i=1, 2\cdots n$），这种方法称为振型叠加法或振型分析法。

在式(6.82)所示的运动方程式给定的情况下，按振型叠加法求解的顺序可归纳如下：

(i) 求解固有值问题方程式$[K]\{u\}=\omega^2[M]\{u\}$，得到固有频率$\omega^{(j)}$（$j=1, 2\cdots n$）和固有矢量$\{u^{(j)}\}$（模为任意）。

(ii) 假定适当的振型阻尼比$h^{(j)}$（$j=1, 2\cdots n$）值。

(iii) 计算正则质量$M^{(j)}=\{u^{(j)}\}^{T}[M]\{u^{(j)}\}$和正则激振力$P^{(j)}=\{u^{(j)}\}^{T}\{P\}$，并求出$P^{(j)}/M^{(j)}$（$j=1, 2\cdots n$）

(iv) 求解关于正则坐标$q^{(j)}$的运动方程式$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=P^{(j)}/M^{(j)}$（$j=1, 2\cdots n$），以求出时间过程$q^{(j)}(t)$。

(v) 按每个时刻作振型叠加 $\delta_i(t)=\sum_{j=1}^{n}u_i^{(j)}q^{(j)}(t)$，求出各质点位移的时间过程$\delta_i(t)$（$i=1, 2\cdots n$）。

6.5 对地面运动的反应

6.5.1 平面振动系统的反应

考虑n个质点的系统仅在x-z平面内作运动，而地面运动只沿x轴方向作用。若系统是剪切型的，各质点的自由度可以只考虑它们与地表之间沿x方向的相对位移x_i（$i=1, 2 \cdots n$），因此系统的自由度为n。

若系统是弯曲剪切型的，则必须考虑各质点绕y轴的转动θ_i（$i=1, 2\cdots n$），系统的自由度便变为$2n$。若只考虑水平地面运动作用下的系统，转动θ_i显然是从位移，因此经过静态减缩后，主位移实际上还只是各质点的相对位移x_i（$i=1, 2\cdots n$），可以按n个自由度的系统来处理。

现在令地面运动的位移为y，各质点的绝对位移便为x_i+y（$i=1, 2\cdots n$），绝对位移矢量可表示为$\{x\}+y\{1\}$，加速度为$\{\ddot{x}\}+\ddot{y}\{1\}$，惯性力为$-[M](\{\ddot{x}\}+\ddot{y}\{1\})$。按照阻尼系数与刚度系数的定义，作用于系统各质点的阻尼力和恢复力与地面运动y，即系统的整个运动没有直接的关系，而只取决于相对于地表的相对速度和相对位移，分别为$-[C]\{\dot{x}\}$和$-[K]\{x\}$。因此，当质点没有受到直接作用的激振力，而只受到地面运动y时的系统运动方程式为

$$[M](\{\ddot{x}\}+\ddot{y}\{1\})+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

或表示成

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=-\ddot{y}[M]\{1\} \tag{6.96}$$

若令式(6.96)的右边为

$$\{P\}=-\ddot{y}[M]\{1\} \tag{6.97}$$

则$\{P\}$为与地面运动对应的等效激振力。比较式(6.96)与基底不作运动时的一般式(6.82)比较可知，这只不过是用$\{x\}$表示位移矢量，且用式(6.97)给出的等效激振力作为激振矢量。因此，只要给出地面运动加速度$\ddot{y}(t)$的时间过程，仍然可以采用§6.4中讲述的各种方法来求系统的反应$\{x(t)\}$。

a．直接积分法

根据8.3.4节中所讲的方法，在给定$[M]$，$[C]$，$[K]$和地面运动加速度的时间过程$\ddot{y}(t)$时，可以用对运动微分方程式(6.96)直接积分的方法来求各质点的绝对加速度、相对速度和相对位移反应的时程。

例如，例题4.1中所示的两质点系统的质量矩阵和刚度矩阵为

$$[M]=\begin{bmatrix}0.055 & \\ & 0.050\end{bmatrix}\mathrm{t\cdot s^2/cm} \qquad [K]=\begin{bmatrix}120 & -120\\ -120 & 240\end{bmatrix}\mathrm{t/cm}$$

若令阻尼系数$c_1=1.0$，$c_2=0.6\,\mathrm{t\cdot s/cm}$，则阻尼矩阵为

$$[C]=\begin{bmatrix}C_2 & -C_2\\ -C_2 & C_1+C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & -0.6\\ -0.6 & 1.6\end{bmatrix}\mathrm{t\cdot s/cm}$$

按直接积分法对埃尔森特罗1940南北方向地震动求反应（参照例题8.13），则用图形表示质点m_2的绝对加速度、相对速度和相对位移反应的时间过程，分别如图6.14中的(a)、(b)和(c)。

但是阻尼矩阵通常不能预先给定，而是如6.4.5节中所述，先假设各阶振型的阻尼比，再在按解耦假定决定式(6.90)的矩阵[D]的基础上，按式(6.91)作出阻尼矩阵[C]。

对于分别由式(6.52)和(6.53)给出质量矩阵和刚度矩阵的五质点系统，若各振型的阻尼比都取5%，则[D]矩阵如式(6.92)，因此阻尼矩阵[C]如式(6.93)所示。在求该系统对埃尔森特罗1940南北地震动分量的反应时（参照例题8.14），可算出质点m_5的相对位移反应时程如图6.15所示。

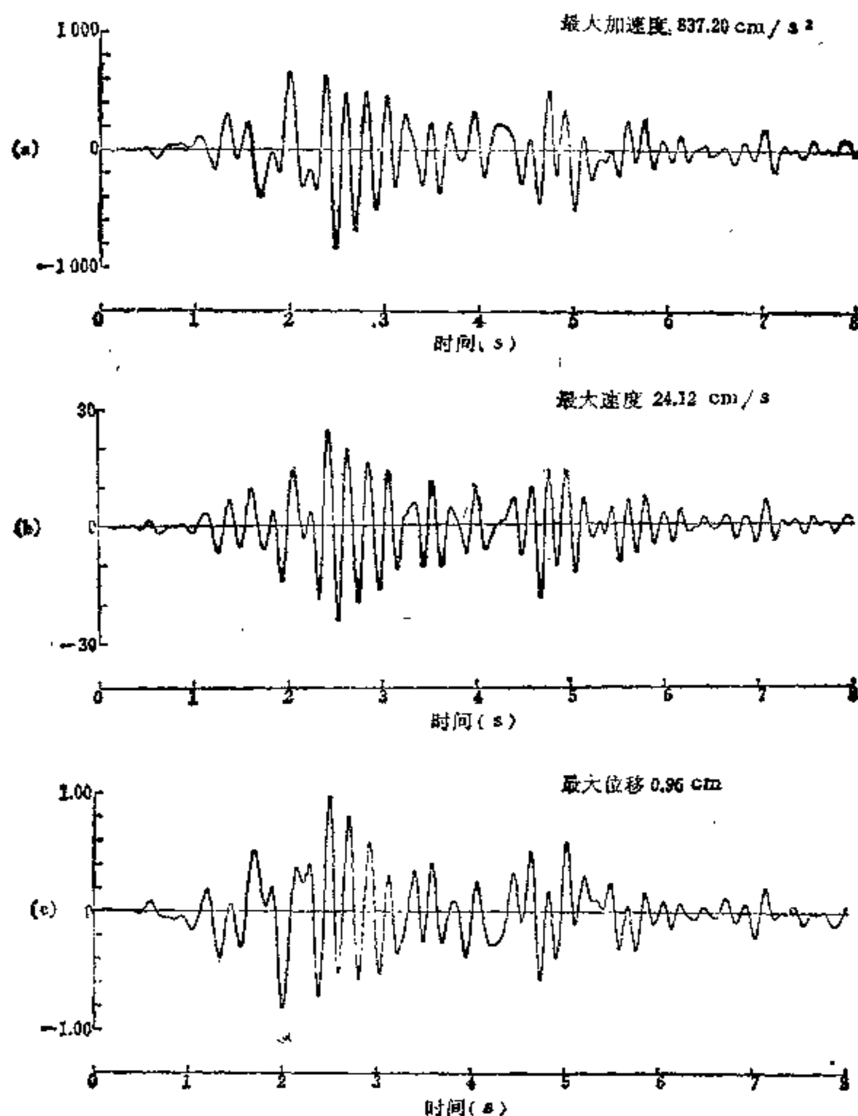


图6.14　二质点系统中的质点m_2对埃尔森特罗1940南北地震动的（a）绝对加速度反应,（b）速度反应,（c）位移反应

b. 振型叠加法

为在时间域中采用振型叠加法，仍然按照式(6.69)

$$\{x\}=[U]\{q\} \tag{a}$$

进行变量置换，并求出与式(6.83)相当的公式

$$[U]^T[M][U]\{\ddot{q}\}+[U]^T[C][U]\{\dot{q}\}+[U]^T[K][U]\{q\}=-\ddot{y}[U]^T[M]\{1\} \qquad (b)$$

将它与式(6.86)的形状相对照，因为正则质量$M^{(j)}=\{u^{(j)}\}^T[M]\{u^{(j)}\}$，正则阻尼系数$C^{(j)}=\{u^{(j)}\}^T[C]\{u^{(j)}\}$、正则弹簧常数$K^{(j)}=\{u^{(j)}\}^T[K]\{u^{(j)}\}$与以前一样，所以可把正则激振力表示成

$$P^{(j)}=-\ddot{y}\{u^{(j)}\}^T[M]\{1\} \qquad j=1, 2\cdots n \qquad (c)$$

进而，如要把式(b)写成式(6.89)的形式，因为右边为

$$P^{(j)}/M^{(j)}=-\ddot{y}\frac{\{u^{(j)}\}^T[M]\{1\}}{\{u^{(j)}\}^T[M]\{u^{(j)}\}}$$

按式(6.58)便可写成

$$P^{(j)}/M^{(j)}=-\beta^{(j)}\ddot{y} \qquad (6.98)$$

因此在系统只受到与式(6.89)相当的地面运动激振时，可把各阶振型的运动方程式表示成

$$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=-\beta^{(j)}\ddot{y} \qquad j=1, 2\cdots n \qquad (6.99)$$

按式(6.99)，右边的系数$\beta^{(j)}$可以理解为用一个比值来表示地面运动加速度$\ddot{y}$参与各阶振型振动的程度。这也就是前面把式(6.58)所定义的系数$\beta^{(j)}$称为参与系数或刺激系数的原因。

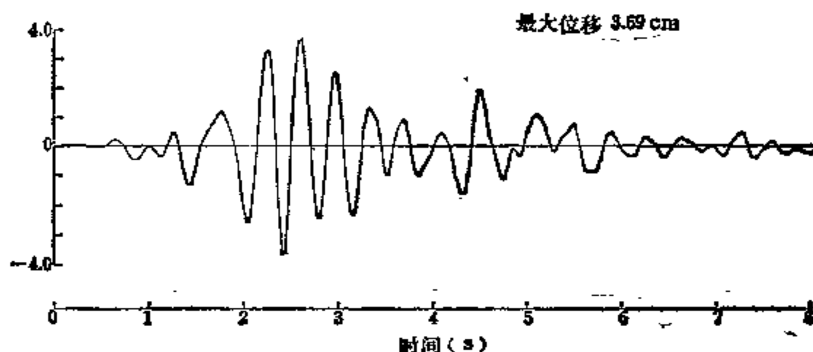


图6.15 五质点系统中的质点m_5对埃尔森特罗1940南北地震动的位移反应（最大位移3.69cm）

按时程分析法或频谱分析法求解式(6.99)时，将式(6.98)代入式(6.94)或(6.95)，得

$$q^{(j)}=-\frac{\beta^{(j)}}{\omega_d^{(j)}}\int_0^t\ddot{y}(\tau)e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}(t-\tau)}\sin\omega_d^{(j)}(t-\tau)d\tau \qquad (d)$$

或为

$$q^{(j)}=-\frac{\beta^{(j)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^{(j)})^2-\omega^2+2ih^{(j)}\omega^{(j)}\omega}\mathscr{F}[\ddot{y}(t)]e^{i\omega t}d\omega \qquad (e)$$

现令

$$q_0^{(j)}(t)=-\frac{1}{\omega_d^{(j)}}\int_0^t\ddot{y}(\tau)e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}(t-\tau)}\sin\omega_d^{(j)}(t-\tau)d\tau \qquad (6.100)$$

或

$$q_0^{(j)}(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^{(j)})^2-\omega^2+2ih^{(j)}\omega^{(j)}\omega}\mathscr{F}[\ddot{y}(t)]e^{i\omega t}d\omega \qquad (6.101)$$

可称之为振型基本解。振型基本解能满足微分方程式

$$\ddot{q}_0^{(j)}(t)+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}_0^{(j)}(t)+(\omega^{(j)})^2q_0(t)=-\ddot{y} \qquad j=1, 2\cdots n \qquad (6.102)$$

若求得振型基本解，由式(d)或(e)，可得

$$q^{(j)}(t)=\beta^{(j)}q_0^{(j)}(t) \tag{6.103}$$

按式(a)，可进一步求得系统的位移反应$\{x\}=[U]\{q\}=[U]\{\beta^{(j)}q_0^{(j)}\}$，即

$$\{x(t)\}=\sum_{j=1}^{n}\{\beta^{(j)}u^{(j)}\}q_0^{(j)}(t) \tag{6.104}$$

所以系统的反应位移可以表示为由式(6.60)定义的参与函数和所有各振型的振型基本解之积的总和。

只要看一看式(6.67)所示的矩阵$[\beta U]$的各列就会懂得，对所有的质点i来说，阶数j越高，参与函数$\beta^{(j)}u_i^{(j)}$的值就越小。当按式(6.104)计算时，不必对所有的阶数$j=1-n$求和，因为高阶振型的影响很小，可以不计，而只需考虑适当的几阶振型，误差也很小。

在按频谱分析法求解时，给出振型基本解的式(6.101)可以表示为

$$q_0^{(j)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[-H(\omega)]\mathscr{F}[\ddot{y}(t)]e^{i\omega t}d\omega$$

式中

$$H(\omega)=\frac{1}{(\omega^{(j)})^2-\omega^2+2ih^{(j)}\omega^{(j)}\omega}$$

即$q_0^{(j)}$为函数$[-H(\omega)]\mathscr{F}[\ddot{y}(t)]$的逆富里哀变换，$-H(\omega)$为频率响应函数。这里所处理的问题是当地面运动由加速度给出时求关于位移的振型基本解，如果按式(3.90)给出的广义输出／输入关系来考虑，当输入为地面运动加速度$\ddot{y}$、地面运动速度$\dot{y}$、或地面运动位移y中的任一个时，就可以求出关于加速度、速度和位移的振型基本解$\ddot{q}_0^{(j)}$，$\dot{q}_0^{(j)}$，$q_0^{(j)}$中的任意一个作为输出。可以将它们的关系表示成如下形式：

$$\ddot{q}_0^{(j)},\ \dot{q}_0^{(j)},\ q_0^{(j)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(\omega)\mathscr{F}[\ddot{y}(t),\ \dot{y}(t),\ y(t)]e^{i\omega t}d\omega \tag{6.105}$$

式中$\hat{H}(\omega)$为表3.3中给出的频率响应函数中的某一个。

6.5.2 由反应谱估算

在前面一节中讲述了按直接积分法或振型叠加法求平面振动系对地面运动的反应。如式(6.104)所示，由振型叠加法也可求得系统反应的时间过程。所以前一节所讲的振型叠加法称为时间过程的振型叠加法。与此不同，本节主要着眼于求反应的最大值，它是利用3.4节中讲过的单质点系统的反应谱来推定多质点系统的最大反应值，这种方法称为反应谱的振型叠加法。

式(6.104)给出了系统的位移反应，某质点i的反应$x_i(t)$可表示成

$$\begin{aligned}x_i(t)&=x_i^{(1)}(t)+x_i^{(2)}(t)+\cdots+x_i^{(n)}(t)\\&=\sum_{j=1}^{n}x_i^{(j)}(t)\end{aligned} \tag{6.106}$$

式中，$x_i^{(j)}(t)$（$j=1$，$2\cdots n$）为第j阶振型对总位移反应的贡献。由式(6.104)和(6.100)，可把$x_i^{(j)}(t)$表示为

$$x_i^{(j)}(t)=\beta^{(j)}u_i^{(j)}\left[-\frac{1}{\omega_d^{(j)}}\int_0^t\ddot{y}(\tau)e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}(t-\tau)}\sin\omega_d^{(j)}(t-\tau)d\tau\right]$$

时间过程$x_i^{(j)}(t)$的最大值为

$$|x_i^{(j)}(t)|_{max}=\beta^{(j)}u_i^{(j)}\cdot\frac{1}{\omega_d^{(j)}}\left|\int_0^t\ddot{y}(\tau)e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}(t-\tau)}\sin\omega_d^{(j)}(t-\tau)d\tau\right|_{max} \tag{a}$$

该式右边的最大值，也就是3.4.1节中定义过的地面运动的位移反应谱。若设第 j 阶振型的无阻尼固有周期为 $T^{(j)}=2\pi/\omega^{(j)}$，便有

$$S_d(h^{(j)},\ T^{(j)})=\frac{1}{\omega_d^{(j)}}\left|\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-h^{(j)}\omega^{(j)}(t-\tau)}\sin\omega_d^{(j)}(t-\tau)d\tau\right|_{max}$$

因此式(a)可写成

$$|x_i^{(j)}(t)|_{max}=\beta^{(j)}u_i^{(j)}S_d(h^{(j)},\ T^{(j)})\qquad i,j=1,\ 2\cdots n \tag{6.107}$$

各质点各个振型的最大位移反应可以由各自的振型参与函数与相应于一定阻尼比和固有周期的位移反应谱之间的乘积来表示。

对于一个正则振动来说，各质点都同时达到各自的最大位移。因此对一个振型而言，它的最大位移矢量可表示成

$$\{x^{(j)}\}_{max}=\beta^{(j)}\{u^{(j)}\}S_d^{(j)}\qquad j=1,\ 2\cdots n \tag{6.108}$$

式中令 $S_d(h^{(j)},\ T^{(j)})\equiv S_d^{(j)}$。

因此各振型的反应都等价于一个单质点系统的反应，而阻尼比从 $h^{(1)}$ 至 $h^{(n)}$ 范围内的地震反应谱值给出后，从这些曲线中就可以读得 $S_d^{(j)}$ 的值，因此从式(6.108)就能够十分简单地计算最大反应值。

可是正如3.4.4.g节中讲过的那样，不同振型的最大反应值一般没有同时性。即各个振型不可能都同时以它的最大值来组成总反应量的最大值。因此，各振型最大值的简单总和，也即 $\{x^{(1)}\}_{max}+\{x^{(2)}\}_{max}+\cdots+\{x^{(n)}\}_{max}$ 可作为总反应量 $\{x\}$ 在理论上的上限值，若这个反应量用在设计中，就会大大地偏于安全一侧。所以有必要从每一个振型的最大反应值去推定最有可能发生的总反应量的最大值。

现在，令 x_1，$x_2\cdots x_n$ 为分别以 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n$ 为平均值，具有标准方差 σ_1，$\sigma_2\cdots\sigma_n$ 的 n 个互相独立的随机变量，则根据所谓的中心极限定理[1]，它们的和 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 可近似地作为具有

$$\left.\begin{array}{l}\text{平均值}\quad \bar{y}=\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_n\\ \text{标准方差}\sigma_y=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2}\end{array}\right\} \tag{b}$$

的正态分布。特别当 $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{x}_n=0$ 时，式(b)就有

$$\left.\begin{array}{l}\bar{y}=0\\ \sigma_y=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2}\end{array}\right\} \tag{c}$$

而且，当 $x=f(t)$ 为具有零均值的正态分布稳态振动量时，x 的最大值 x_{max} 与其标准方差 σ 之比 $\lambda=x_{max}/\sigma$ 的取值范围大体上在 3—4.5之间变动[2]。具体取值随振动量 x 的持续时间和频率特性而变，它的取值范围总的来说是相当窄的。

如果假设上述变量 x_1，$x_2\cdots x_n$ 和它们的和 y 也可采用同一个 λ 值，则 $\sigma_i=(x_i)_{max}/\lambda$，$\sigma_y=y_{max}/\lambda$，将它们代入式(c)的第2式，便变成

$$y_{max}=\sqrt{(x_1)_{max}^2+(x_2)_{max}^2+\cdots+(x_n)_{max}^2} \tag{d}$$

按式(6.106)，系统的位移反应 $x_i(t)$ 可表示成每个振型的振型反应 $x_i^{(j)}(t)(j=1,2\cdots n)$ 之和，而 $x_i(t)$ 或 $x_i^{(j)}(t)$ 等振动量并不一定能满足上面提到的关于随机变量的各种假定。但这里作为一种近似，假设式(d)的关系对式(6.106)也成立，便有

1) 在大多数概率论教科书中，对此定理均有叙述。

2) 见Davenport, A, G; Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol.28, 1964.

$$|x_i(t)|_{max} \doteq \sqrt{|x_i^{(1)}|_{max}^2 + |x_i^{(2)}|_{max}^2 + \cdots + |x_i^{(n)}|_{max}^2} \qquad i=1,\ 2\cdots n \qquad (6.109)$$

或将其代入式(6.107)，可以有

$$|x_i(t)|_{max} \doteq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [\beta^{(j)} u_i^{(j)} S_d(h^{(j)}, T^{(j)})]^2} \qquad i=1,\ 2\cdots n \qquad (6.110)$$

于是，反应的最大值可以由各个振型反应最大值的平方和开方来求得。如果式(6.109)采用矢量记号形式，便可以写成

$$\{x\}_{max} \doteq \sqrt{\{(x^{(1)})^2\}_{max} + \{(x^{(2)})^2\}_{max} + \cdots + \{(x^{(n)})^2\}_{max}} \qquad (6.111)$$

象这种利用反应谱先按式(6.108)求振型反应的最大值，再按式(6.109)近似计算系统反应最大值的方法，在抗震设计中是经常使用的。

6.5.3 串接型模型的反应

图6.16中所示的质点系统模型在建筑物的动力分析中是经常使用的，其质量全部集中于各个楼板，因此只须考虑质点沿铅直方向的连结而无需考虑沿水平方向的连结。这一类系统称为串接型模型，或者俗称为糖葫芦型模型。与此不同，如图6.17给出的那一种，需要考虑水平方向的构件沿横向的连结，这种模型称为串并型模型。

实际上，建筑物的地基与基础之间发生相对位移时，建筑物与地基的运动存在相互间的干涉作用。这类作用称为地基与建筑物之间的相互作用，在有些情况下会给建筑物的反应带来明显的影响。但是本书不涉及这一类问题，而认为系统的基底与地基之间不发生相对位移，两者是固定在一起的。换句话说，也就是把基底的运动解释成地面的运动。

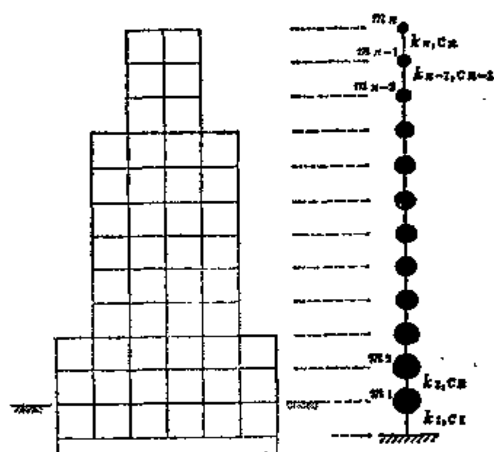


图6.16　串接型模型

若令各质点对其基底的相对水平位移为$x_i(i=1,2\cdots n)$，质量矩阵为

$$[M] = \begin{bmatrix} m_n & & & & \\ & m_{n-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_2 & \\ & & & & m_1 \end{bmatrix} \qquad (6.112)$$

如图6.16所示，从下到上各质点的编号为m_1，$m_2\cdots m_n$，弹簧常数和阻尼系数的下标也按照这样的次序，即其序号与层数完全一致。同时矢量的各个分量和矩阵的元素也都是凡位于上部的便代表上层的质点，这样可便于理解。

对于串接模型，各质点只与其上下的质点连结，即m_n仅与m_{n-1}连结，m_1与m_2及地表连结。假定系统为楼板是完全刚性的剪切型系统，其阻尼矩阵和刚度矩阵便如下式所示：

$$[C] = \begin{bmatrix} c_n & -c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_n & c_{n-1}+c_n & -c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{n-1} & c_{n-2}+c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots c_2+c_3 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_2 & c_1+c_2 \end{bmatrix} \qquad (6.113)$$

$$
[K]=\begin{bmatrix} k_n & -k_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_n & k_{n-1}+k_n & -k_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_{n-1} & k_{n-2}+k_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots k_2+k_3 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \tag{6.114}
$$

只有在主对角线上及与其上、下相邻的副对角线上并列的元素不为零，这样的矩阵称为三项对角矩阵。当把框架式建筑物作为研究对象，只采用刚性楼板假定，同时容许梁能发生弯曲变形时，必须注意如图6.17(a)所示，为了求刚度系数，给某质点单位水平位移，并约束其它质点的位移时，因构件的弯曲变形使所有的质点产生反力，刚度矩阵便成为无零元素的满矩阵。与此相反，若采用梁的刚度为无限大的完全刚性楼板假定，如同图(b)所示，则当在一个质点处给定位移时，只有与其直接相邻的上、下部位的质点受到影响，于是便得到如式(6.114)那样的三项对角矩阵。此外假定系统是弯曲剪切型的，可以对质点的转动实施静态减缩，其减缩刚度矩阵为满矩阵。

如设地面运动为$y(t)$，运动方程式

$$
[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=-\ddot{y}[M]\{1\} \tag{6.115}
$$

就和式(6.96)完全一样。若给出的地面运动是加速度时间过程，便可将该联立方程式通过直接积分求解。如对阻尼进一步采用解耦的假定，便可以按叠加法求解。如果采用频谱分析方法并选择适当的频率响应函数，也可以用速度或位移的时间过程给出地面运动输入来求解反应。其方法都与6.5.1节中所讲的方法完全一样。

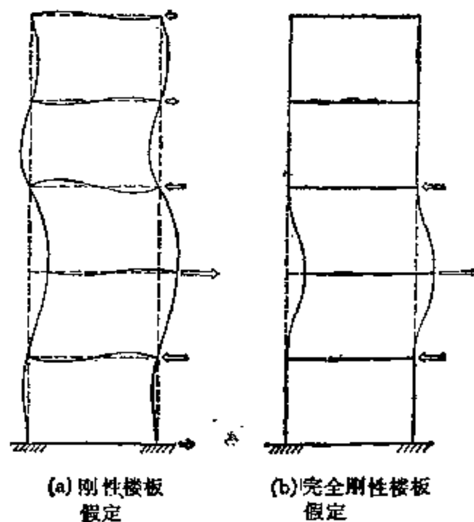


图6.17　刚性楼板假定与力的传递

为了求各质点的位移反应$x_i(t)$而求解式(6.115)时，在任意时刻作用于各质点的力可由式(6.10)表示为

$$
\begin{Bmatrix} P_n(t) \\ \vdots \\ P_2(t) \\ P_1(t) \end{Bmatrix}=[K]\begin{Bmatrix} x_n(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \\ x_1(t) \end{Bmatrix}
$$

即

$$
\{P(t)\}=[K]\{x(t)\}
$$

为了进一步求出这时作用于质点间构件的动剪力$Q_i(t)$，即所谓层间剪力，只需将力$P_i(t)$从顶层向下逐个静态相加。若采用矩阵表示便有

$$
\begin{Bmatrix} Q_n(t) \\ \vdots \\ Q_2(t) \\ Q_1(t) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_n(t) \\ \vdots \\ P_2(t) \\ P_1(t) \end{Bmatrix}
$$

也即

$$\{Q(t)\}=[S]\{P(t)\} \tag{6.117}$$

式中$Q_i(t)$为作用于质点m_i与m_{i-1}之间的层间剪力，$[S]$为一个下三角矩阵。

将作用于建筑物第 i 层即质点m_i与m_{i-1}之间的最大层间剪力值$|Q_i(t)|_{max}$除以它上部所有各层的建筑物重量后的值

$$C_i=|Q_i(t)|_{max}/\sum_{i=i}^{n} m_i g \tag{6.118}$$

称为该层的楼层剪力系数。特别称$Q_1(t)$为基底剪力。若建筑物的全部重量为W时，把比值

$$C=|Q_1(t)|_{max}/W \tag{6.119}$$

即最下层的楼层剪力系数称作基底剪力系数。式(6.119)给出的基底剪力系数在系统的全部质量被当作集中于一个质点时，便和3.4.4.b节中所讲的基底剪力系数的定义相对应。

同样，若以R_i（$i=0$，1，$2\cdots n-1$）表示作用于各质点的楼层力矩，则

$$\begin{Bmatrix} R_{n-1}(t) \\ \vdots \\ R_1(t) \\ R_0(t) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} H_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ H_n & H_{n-1} & \cdots & H_2 & 0 \\ H_n & H_{n-1} & \cdots & H_2 & H_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_n(t) \\ \vdots \\ Q_2(t) \\ Q_1(t) \end{Bmatrix}$$

或

$$\{R(t)\}=[H]\{Q(t)\} \tag{6.120}$$

式中的$R_i(t)$为作用于质点 i 处的力矩，H_i为质点m_i与m_{i-1}之间的层高，$[H]$为以层高为元素的下三角矩阵。$R_0(t)$为作用于系统基底的力矩，通常称为倾复力矩。

设地面运动的时间过程在 $t=t_1$，$t_2\cdots t_n$的每一个时刻上给出，逐时地按这些时刻求解式(6.115)可以求得系统的反应位移矢量$\{x(t)\}$。这样得到的全部计算结果可以表示成

$$[x]_t=\begin{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix}_{t_1} & \begin{Bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix}_{t_2} & \begin{Bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix}_{t_N}\end{bmatrix} \tag{a}$$

即以各个时刻的反应位移矢量为列的 n 行 N 列矩阵。若采用时间过程的振型叠加法，要首先求出以各时刻从第 1 阶到第 n 阶正则坐标$q^{(j)}=(j=1，2\cdots n)$ 为分量的列矢量。将它们汇总后表示成与式(a)相似的 n 行 N 列矩阵

$$[q]_t=\begin{bmatrix}\begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{Bmatrix}_{t_1} & \begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{Bmatrix}_{t_2} & \cdots & \begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{Bmatrix}_{t_N}\end{bmatrix}$$

由式(6.69)，关系式$[x]_t=[U][q]_t$成立。作用于质点的力（恢复力）、剪力、力矩等也可以用同样的矩阵来表示，由式(6.116)、(6.117)和(6.120)，可把它们表示为

$$\left.\begin{aligned} [x]_t&=[U][q]_t \\ [P]_t&=[K][x]_t \\ [Q]_t&=[S][P]_t \\ [R]_t&=[H][Q]_t \end{aligned}\right\} \tag{6.121}$$

这些矩阵统称为反应矩阵，矩阵中的每列表示对应某时刻的反应量，每行则分别表示各反应量的时间过程。

如前所述，对设计最具重要意义的是反应量的最大值，在式(6.121)给出的反应矩阵中，这种最大值可以由各行元素中绝对值最大的来给出。现在将它们的最大值挑选出来作为元素，把它们表示成列矢量，则成

$$\{x\}_{max}=\left\{\begin{array}{c}|x_n|_{max}\\ \vdots\\ |x_2|_{max}\\ |x_1|_{max}\end{array}\right\}$$

同样由式(6.121)的第2式到第4式，可得到$\{P\}_{max}$，$\{Q\}_{max}$，$\{R\}_{max}$等。

现在，以图6.12给出的系统为例，求该系统在埃尔森特罗1940年南北分量地震动（最大加速度为326cm/s²）作用下楼层剪力的最大值、楼层剪力系数和楼层力矩的最大值（参照图8.15）。所求结果在图6.18中用实线表示。

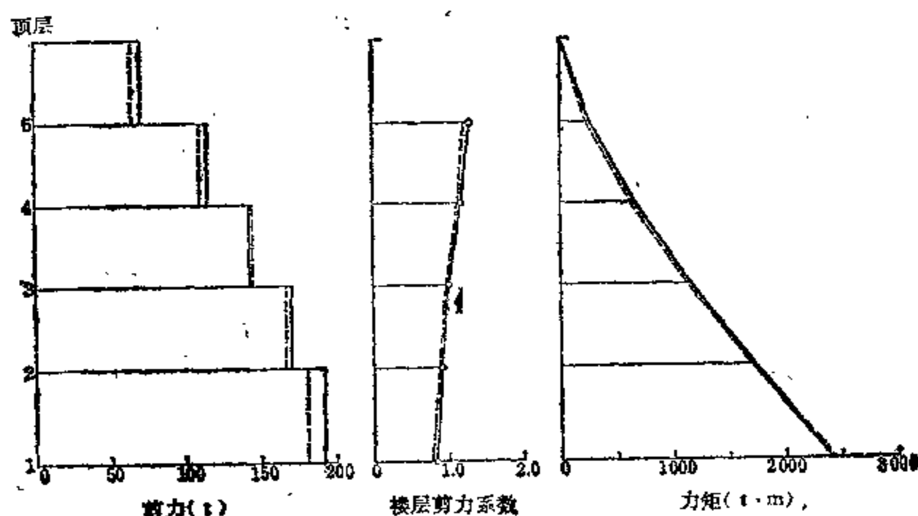


图6.18　五质点系统对埃尔森特罗1940南北分量地震动的反应分析结果

当采用反应谱振型叠加法时，则按式(6.108)对每一个振型决定$\{x^{(j)}\}_{max}$。与此对应，若应用式(6.116)、(6.117)和(6.120)，便可求得每个振型的最大反应量

$$\left.\begin{array}{l}\{P^{(j)}\}_{max}=[K]\{x^{(j)}\}_{max}\\ \{Q^{(j)}\}_{max}=[S]\{P^{(j)}\}_{max}\\ \{R^{(j)}\}_{max}=[H]\{Q^{(j)}\}_{max}\end{array}\right\}\tag{6.122}$$

根据这些结果，并采用与式(6.111)同样的表示方式，可以近似算得系统的最大反应量为

$$\begin{array}{l}\{P_{max}\}=\sqrt{\{(P^{(1)})^2\}_{max}+\{(P^{(2)})^2\}_{max}+\cdots+\{(P^{(n)})^2\}_{max}}\\ \{Q_{max}\}=\sqrt{\{(Q^{(1)})^2\}_{max}+\{(Q^{(2)})^2\}_{max}+\cdots+\{(Q^{(n)})^2\}_{max}}\\ \{R_{max}\}=\sqrt{\{(R^{(1)})^2\}_{max}+\{(R^{(2)})\}^2_{max}+\cdots+\{(R^{(n)})^2\}_{max}}\end{array}\tag{6.123}$$

图6.18中还画出了按反应谱振型叠加法得到的分析结果，如图中虚线所示（参照例题8.12）。

6.5.4　弯曲剪切型振动

如6.3.3c节所述，当把质点系的振动考虑为弯曲剪切型时，要考虑图6.3(a)中所示各质

点自由度中的 x 和 ϑ。在这一节中，把绕 y 轴的转动 ϑ 写成 θ 。现有的质点数为 n，若将其位移矢量的分量按照如下顺序排列：

$$\{\delta\}=\{x_n\cdots x_2,\ x_1\ \vdots\ \theta_n\cdots\theta_2,\ \theta_1\}^T$$

则质量矩阵为

$$[M]=\begin{bmatrix}[m] & \\ & [J]\end{bmatrix}$$

式中的 $[m]$ 和 $[J]$ 分别为

$$[m]=\begin{bmatrix}m_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & m_2 & \\ & & & m_1\end{bmatrix}\quad [J]=\begin{bmatrix}J_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_2 & \\ & & & J_1\end{bmatrix}$$

其中 J_i（$i=1,\ 2\cdots n$）为各质点绕 y 轴的惯性矩。刚度矩阵可表示成

$$[K]=\begin{bmatrix}[K^{xx}] & [K^{x\theta}] \\ [K^{\theta x}] & [K^{\theta\theta}]\end{bmatrix}$$

对于串接型模型，若采用完全刚性楼板的假定，则 $[K^{xx}]$、$[K^{x\theta}]$、$[K^{\theta x}]$、$[K^{\theta\theta}]$ 等子矩阵都是三项对角矩阵，例如

$$[K^{\theta\theta}]=\begin{Bmatrix}K^{\theta\theta}_{n,n} & K^{\theta\theta}_{n,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ K^{\theta\theta}_{n-1,n} & K^{\theta\theta}_{n-1,n-1} & K^{\theta\theta}_{n-1,n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K^{\theta\theta}_{2,2} & K^{\theta\theta}_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K^{\theta\theta}_{1,2} & K^{\theta\theta}_{1,1}\end{Bmatrix} \tag{6.124}$$

而且显然 $[K^{xx}]$ 和 $[K^{\theta\theta}]$ 为对称矩阵，且 $[K^{\theta x}]=[K^{x\theta}]^T$。

弯曲剪切型系统的无阻尼运动方程式可以用下式表示：

$$\left[\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & J\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\ddot{x} \\ \hline \ddot{\theta}\end{array}\right\}+\left[\begin{array}{c|c} K^{xx} & K^{x\theta} \\ \hline K^{\theta x} & K^{\theta\theta}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}x \\ \hline \theta\end{array}\right\}=-\ddot{y}\left[\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & J\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}1 \\ \hline 0\end{array}\right\} \tag{a}$$

质点的转角 θ 是从位移，因为沿这个方向没有激振力的作用。因此上式右边矢量的上半部分 n 个分量都是 1，而下半部分的分量都为零。一般称这样的矢量为影响矢量。当运动方程式中的位移全都是主位移时，影响矢量必是一个所有分量都为 1 的矢量，即单位矢量。

对通常的建筑物来说，其惯性矩和弯曲刚度分别比其质量和剪切刚度大得多。因此式（a）中的子矩阵 $[m]$ 与 $[J]$ 和 $[K^{xx}]$ 与 $[K^{\theta\theta}]$ 在数值上有极大的差别，在计算固有值时会在精度上发生问题。为了避开这个困难，现令系统的总高度为 H，并首先把式（a）表示成

$$\left[\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & J/H\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\ddot{x} \\ \hline H\ddot{\theta}\end{array}\right\}+\left[\begin{array}{c|c} K^{xx} & K^{x\theta}/H \\ \hline K^{\theta x} & K^{\theta\theta}/H\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}x \\ \hline H\theta\end{array}\right\}=-\ddot{y}\left[\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & J/H\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}1 \\ \hline 0\end{array}\right\}$$

接着用H去除以矩阵下半部的各行，变成所希望的形式

$$\left[\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & J/H^2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \ddot{x} \\ \hline H\ddot{\theta} \end{array}\right\}+\left[\begin{array}{c|c} K^{xx} & K^{x\theta}/H \\ \hline K^{\theta x}/H & K^{\theta\theta}/H^2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} x \\ \hline H\theta \end{array}\right\}=-\ddot{y}\left[\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & J/H^2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right\} \quad (6.125)$$

经过这样处理后，质量矩阵和刚度矩阵中的各个元素分别都具有同样的单位$t\cdot s^2/cm$和t/cm。

对于有阻尼的情况，则要按式(6.91)给出的要领决定阻尼矩阵，系统对任意地面运动激振的反应的计算方法同前面讲过的各种问题一样。

此外，根据§6.3.2中讲过的静态减缩的方法，并假设$[J/H^2]\doteq[0]$，式(6.125)可写成

$$[m]\{\ddot{x}\}+[K^{xx}]\{x\}+[K^{x\theta}/H]\{H\theta\}=-\ddot{y}[m]\{1\} \quad (b)$$

$$[K^{\theta x}/H]\{x\}+[K^{\theta\theta}/H^2]\{H\theta\}=\{0\} \quad (c)$$

由式(c)得

$$\{H\theta\}=-[K^{\theta\theta}/H^2]^{-1}[K^{\theta x}/H]\{x\} \quad (d)$$

将此式代入式(b)有

$$[m]\{\ddot{x}\}+[K^{xx}]^*\{x\}=-\ddot{y}[m]\{1\} \quad (6.126)$$

式中的$[K^{xx}]^*$为

$$[K^{xx}]^*=[K^{xx}]-[K^{x\theta}/H][K^{\theta\theta}/H^2]^{-1}[K^{\theta x}/H] \quad (6.127)$$

它是减缩刚度矩阵。对式(6.126)加上阻尼项后的运动方程式可求得平动位移反应的时间过程$\{x\}$。若有必要，可将它代入式(d)，由此可算出转动位移反应的时间过程$\{\theta\}$。

【例题6.14】 设有弯曲剪切型的五质点系统，并设它的质量和惯性矩为$m_5=0.055$，$m_4=m_3=m_2=0.045$，$m_1=0.050$，$J_5/H^2=0.00050$，$J_4/H^2=J_3/H^2=J_2/H^2=0.00040$，$J_1/H^2=0.00045t\cdot s^2/cm$，且它的刚度矩阵可表示成式(6.125)的形式，其值如下：

$$[K]=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
120 & -120 & & & & -12 & -12 & & & \\
-120 & 270 & -150 & & & 12 & -3 & -15 & & \\
 & -150 & 330 & -180 & & & 15 & -3 & -18 & \\
 & & -180 & 390 & -210 & & & 18 & -3 & -21 \\
 & & & -210 & 420 & & & & 21 & -3 \\
\hline
-12 & 12 & & & & 120 & -118 & & & \\
-12 & -3 & 15 & & & -118 & 250 & -127 & & \\
 & -15 & -3 & 18 & & & -127 & 275 & -142 & \\
 & & -18 & -3 & 21 & & & -142 & 300 & -151 \\
 & & & -21 & -3 & & & & -151 & 325
\end{array}\right] \ t/cm$$

试求其各阶固有周期和参与函数（振型）。并计算经静态减缩后的刚度矩阵和固有周期、参与函数。

［解］ 计算结果可参照例题8.6，剪切振动的固有周期和振型在图6.19中用无括号的数值和实线表示，弯曲振动的固有周期和振型如图6.20所示。经静态减缩后的刚度矩阵为$[K^{xx}]^*$，具体数值列出于下页。图6.19中括号内的数值和虚线则表示这时的固有周期和振型。

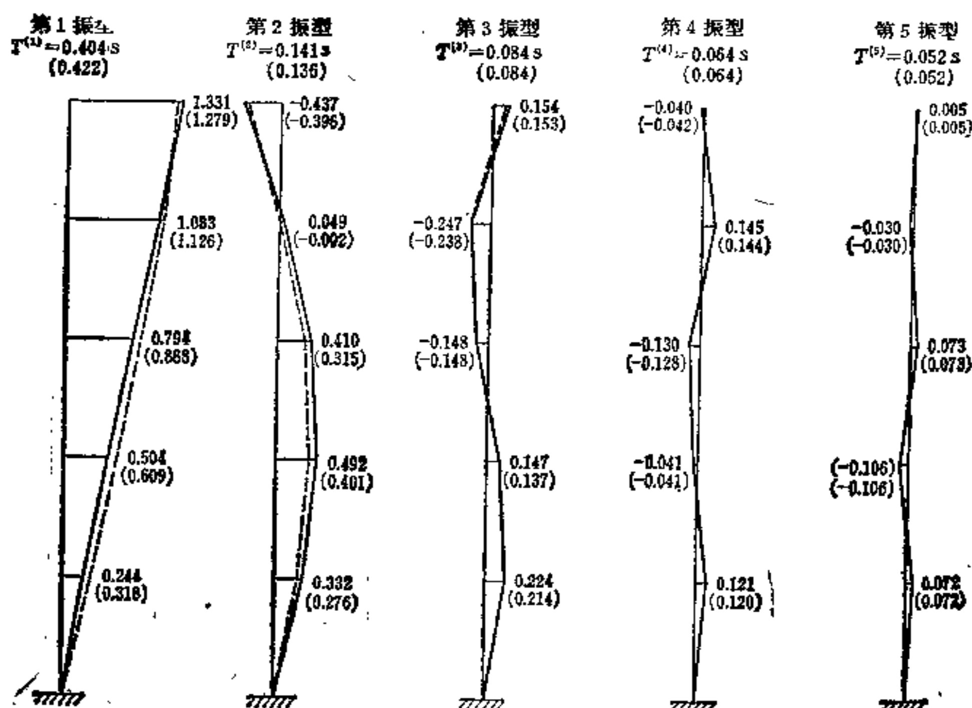


图6.19　剪切变形的振型

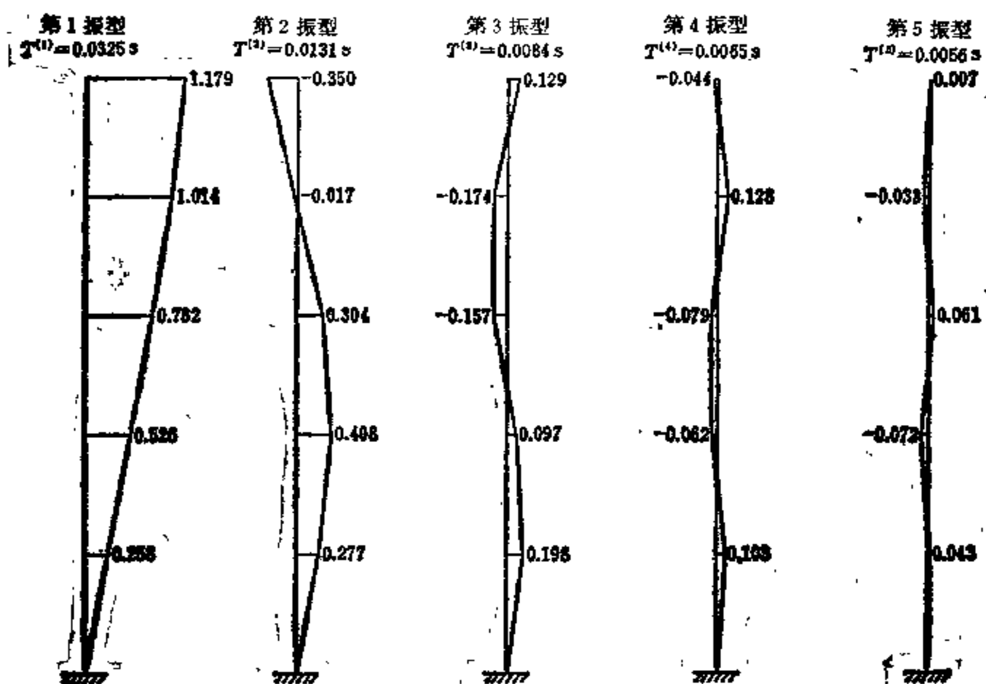


图6.20　弯曲变形的振型

$$[K^{xx}]^{*}=\begin{bmatrix} 118.80 & -121.18 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ -121.18 & 267.15 & -151.57 & 0.20 & 0.20 \\ 0.04 & -151.57 & 326.35 & -181.79 & 0.49 \\ 0.04 & 0.20 & -181.79 & 385.59 & -212.01 \\ 0.04 & 0.20 & 0.49 & -212.01 & 414.93 \end{bmatrix} \text{t/cm}$$

6.5.5 扭转振动

6.3.3c节中曾提到，对作为扭转振动系统考虑的质点系统的每个质点，都要考虑图6.10(b)给出的三个自由度x，y，z。本节用ϕ表示绕z轴的转动。为简单起见，令建筑物各层的主轴方向都一致，地面运动也是沿这个方向作用，取建筑物各层的重心为原点，并假定x轴沿其主轴方向，则y轴方向不发生运动。因为由地面运动产生的激振力对其重心不会产生力矩，因此各个质点有主位移x和从位移ϕ。现设质点数为n，若将其位移矢量的分量按照如下顺序排列：

$$\{\delta\}=\{x_n\cdots x_2,\ x_1|\phi_n\cdots\phi_2,\ \phi_1\}^T$$

则质量矩阵为

$$[M]=\begin{bmatrix}[m] & \\ & [J]\end{bmatrix}$$

式中

$$[m]=\begin{bmatrix}m_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & m_2 & \\ & & & m_1\end{bmatrix}\quad [J]=\begin{bmatrix}J_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_2 & \\ & & & J_1\end{bmatrix},$$

这时J_i（$i=1$，$2\cdots n$）为绕通过质点重心z轴转动的极惯性矩。刚度矩阵可表示成

$$[K]=\begin{bmatrix}[K^{xx}] & [K^{x\phi}] \\ [K^{\phi x}] & [K^{\phi\phi}]\end{bmatrix}$$

对于假定为完全刚性楼板的串接形模型，式(a)右边的子矩阵仍然和式(6.124)所表示的形式一样，为三项对角矩阵。

运动方程式和式(6.125)的形式相同，可以表示成

$$\left[\begin{array}{c|c}m & \\ \hline & J/l_y^2\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\ddot{x} \\ \hline l_y\ddot{\phi}\end{array}\right\}+\left[\begin{array}{c|c}K^{xx} & K^{x\phi}/l_y \\ \hline K^{x\phi}/l_y & K^{\phi\phi}/l_y^2\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}x \\ \hline l_y\phi\end{array}\right\}=-\ddot{y}\left[\begin{array}{c|c}m & \\ \hline & J/l_y^2\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}1 \\ \hline 0\end{array}\right\} \quad (6.128)$$

但这时l_y表示建筑物在垂直于x轴方向上的宽度。

前面曾经讲过，扭转振动系统的刚度影响系数之间存在式(6.38)所示的关系。因此由式(6.128)表示的刚度子矩阵$[K^{xx}]$与$[K^{x\phi}/l_y]$和$[K^{\phi x}/l_y]$的主对角元素之间存在如下关系：

$$-(K_{ii}^{x\phi}/l_y)/K_{ii}^{xx}=-(K_{ii}^{\phi x}/l_y)/K_{ii}^{xx}=e_i^y/l_y \quad (6.129)$$

称e_i^y/l_y（$i=1$，$2\cdots n$）为各层沿y方向的偏心率。同样，在考虑y方向的振动时，可以定义沿x方向的偏心率为e_i^x/l_x。

式(6.128)和式(6.125)有完全相同的形式。因此对扭转振动的分析可以完全按照弯曲剪切振动时的情形进行。当各层的刚性主轴方向与地面运动的作用方向不一致时，或者当x，y两方向的振动发生耦连时，运动方程式的形式就变得复杂起来。但是6.1节中提到过的关于影响矩阵的一般性定义仍然成立，刚度影响系数或位移影响系数的值，可以只按静力学的方法作出适当的评估，就解法原理来说，与本节中所讲的方法丝毫没有两样。

第七章　阻尼的评价

7.1　阻尼模型

§2.3.1中已经说过，通常用阻尼器来作为表示结构物的阻尼机构的模型。同时，将它放入系统中时，如图2.15所示，总是不言而喻地将表示系统刚度的弹簧与阻尼器并列组合在一起。或式（6.29）所表示的多质点系统的运动方程式也是以弹簧与阻尼器并列配置为前提的。

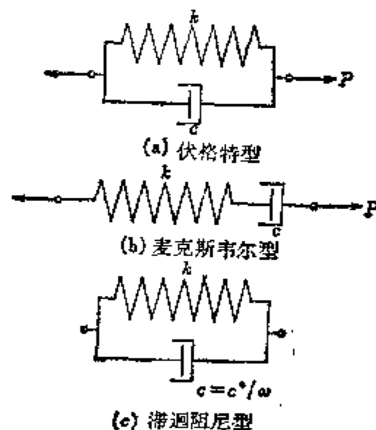


图7.1　阻尼模型

对于系统中弹簧与阻尼器的组合方式，至今已提出过很多方案。这里我们只提出其中几个很简单的模型来研究其特性。

a. 伏格特（Voigt）模型

图7.1(a)所示弹簧与阻尼器并列组合的模型称为伏格特模型。也有称为开尔文（Kelvin）模型的。设弹簧常数为k，阻尼系数为c，作用在模型上的广义力为P，与此相应产生的模型位移为δ。在这种并列模型中，弹簧与阻尼器的位移相同，所以

弹簧产生的抗力　$P_1=k\delta$

阻尼器产生的阻力　$P_2=c\dot{\delta}$

由于$P=P_1+P_2$，所以表示伏格特模型的方程式为

$$P=k\delta+c\dot{\delta} \tag{a}$$

现假设对模型加上圆频率为ω的谐和振动位移

$$\delta=\delta_0\sin\omega t \tag{b}$$

代入式（a），得

$$P=\delta_0(k\sin\omega t+c\omega\cos\omega t \tag{c}$$

从式（b）和式（c）消去ωt，则得到力P和位移δ的关系式为

$$\left(\frac{P}{k\delta_0}\right)^2-2\left(\frac{P}{k\delta_0}\right)\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)+\left[1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2\right]\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2=\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2 \tag{d}$$

如图7.2所示，如果以$P/k\delta_0$和δ/δ_0为坐标轴，式（d）就是一个椭圆方程。如再将坐标轴如图所示转动一个角度θ

$$\theta=\arctan\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2+\sqrt{4+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^4}\right]$$

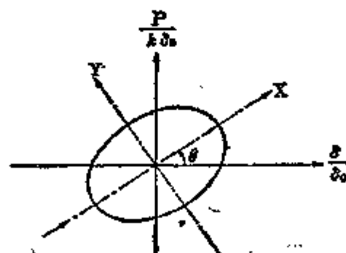


图7.2　力—位移椭圆

则对转动后的新坐标轴X，Y，式（d）就成为椭圆标准方程式

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad (e)$$

式中

$$a^2=2(c\omega/k)^2/[2+(c\omega/k)^2-\sqrt{4+(c\omega/k)^4}]$$

$$b^2=2(c\omega/k)^2/[2+(c\omega/k)^2+\sqrt{4+(c\omega/k)^4}]$$

椭圆的面积为πab。如用ΔV表示面积，则$\Delta V=\pi c\omega/k$。如果以$P-\delta$即力-位移坐标来表示图7.2的两个轴，则$\Delta V=\pi c\omega/k\cdot(k\delta_0)\cdot\delta_0$，即

$$\Delta V=\pi c\omega\delta_0^2 \qquad (7.1)$$

如2.4.4节中所述，这个面积表示每次循环中的能量损失。

b. 麦克斯韦尔模型

如图7.1（b）所示，弹簧与电尼器串联布设的模型称为麦克斯韦尔模型。串联模型中弹簧与阻尼器的受力相等。

弹簧产生的位移 $\delta_1=P/k$

阻尼器产生的位移 $\dot{\delta}_2=P/c$即$\delta_2=\int(P/c)\mathrm{d}t$

由于$\delta=\delta_1+\delta_2$，所以表示麦克斯韦尔模型状态的方程式为

$$\delta=P/k+\int_0^t(P/c)\mathrm{d}t \qquad (f)$$

或者微分后得

$$\dot{P}+\frac{k}{c}P=k\dot{\delta}$$

假设

$$P=k\delta_0\sin\omega t \qquad (g)$$

代入式（f）即得

$$\delta=\delta_0\left[\sin\omega t+\frac{k}{c\omega}(1-\cos\omega t)\right] \qquad (h)$$

从式（g）和式（h）消去ωt，得

$$\left[1+\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2\right]\left(\frac{P}{k\delta_0}\right)^2-2\left(\frac{P}{k\delta_0}\right)\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)+\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2=\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2$$

这是椭圆方程。如将坐标轴转动一个角度θ

$$\theta=\arctan\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2+\sqrt{4+\left(\frac{k}{c\omega}\right)^4}\right]$$

则可得与式（e）相同的椭圆标准方程式。这时

$$a^2=2\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2\Big/\left[2+\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2-\sqrt{4+\left(\frac{k}{c\omega}\right)^4}\right]$$

$$b^2=2\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2\Big/\left[2+\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2+\sqrt{4+\left(\frac{k}{c\omega}\right)^4}\right]$$

因此，椭圆的面积为

$$\Delta V=\pi(k/c\omega)\cdot k\delta_0^2 \qquad (7.2)$$

c. 滞回阻尼模型

图7.1（c）中的模型与伏格特型相同，也是并列型的，但假定了阻尼器的阻尼常数与

活塞的速度即圆频率成反比，这种模型称为滞迴阻尼模型。这时只要将对应伏格特型的各个式子中的 c 以下式的 c 值代替即可，

$$c = c^{*}/\omega \qquad c^{*}\text{：常数} \tag{7.3}$$

所以，能量损失为

$$\Delta V = \pi c^{*} \delta_0^2$$

d．模型与阻尼比

各种模型的最大势能均为 $V = \frac{1}{2}k\delta_0^2$。因此，能量损失率 $\Delta V/V$ 及其与阻尼比的关系由式（2.66）给出，由此可求出各种模型的阻尼比为

伏格特型 $\quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{c\omega}{k} \qquad (7.5)$

麦克斯韦尔型 $\quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{c\omega} \qquad (7.6)$

滞迴阻尼型 $\quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^{*}}{k} \qquad (7.7)$

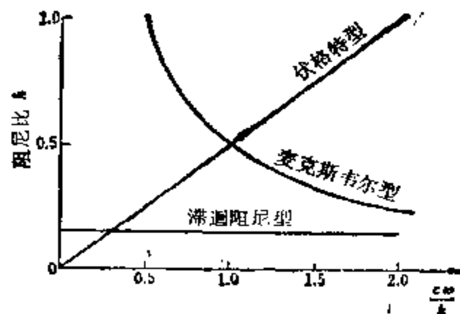


图7.3 阻尼模型与阻尼比

以图形表示如图 7.3 所示。由图上可以看出，对伏格特型，阻尼比与频率成正比；对滞迴阻尼型，则与频率无关，为一常数；而对麦克斯韦尔型，阻尼比与频率成反比。

图7.4为使实际建筑物作微小振动时阻尼比的实测值与固有圆频率的关系图*。图上单

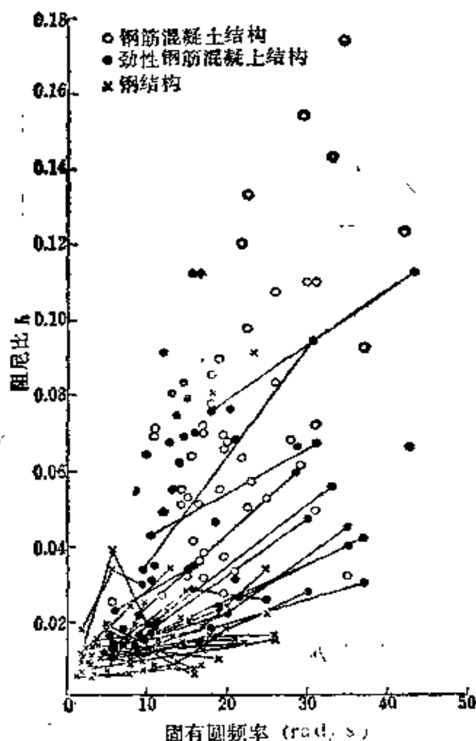


图7.4 实际建筑物的阻尼比

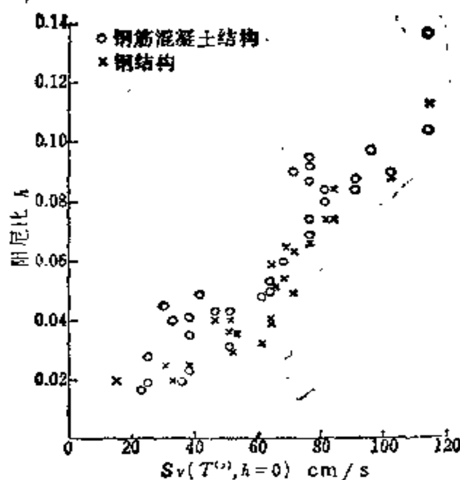


图7.5 地震动强度与阻尼比

* 日本建築学会構造標準委員会振動分科会：建築物の耐震设计資料，建筑振動実験一览表および实在建築物の振動特性(その1)，昭和42年10および昭和47年10月。

独的点表示对应建筑物一阶振型时的阻尼比，用直线联结的点则表示同一建筑物从一阶振型到高阶振型时阻尼比实测值的变化。点的离散性很大，很难判断用哪种阻尼模型合适。但从所画点子的大体趋势来看，实用上似乎可以假定为伏格特模型。另外从安全角度出发重视高阶振型的影响时，常常假定为滞迴阻尼型来进行分析。

图7.4是表示微小振动时的阻尼比，可以想象，如果象强地震时那样建筑物反应变大时，阻尼比的值当然要变得较大。作为参考，图7.5给出了表示振型阻尼比与该振型固有周期所对应的地震动无阻尼速度反应谱值之间的关系*。

7.2 阻尼矩阵的解耦

关于运动方程式(6.40)的固有值问题方程式（6.43）的解，以式（6.74）的形式表示为

$$[K][U]=[M][U][\Omega^2] \tag{7.8}$$

式中$[U]$为振型矩阵，$[\Omega]$为频率矩阵。为使运动方程式（6.82）完全解耦的充分必要条件是式（6.83）满足如下的正交条件：

$$[U]^T[C][U]\text{；对角矩阵}=[c^{(j)}] \tag{7.9}$$

如果这个式子成立，运动方程式就可精确地分解为式（6.86），即各阶振型的独立微分方程式

$$M^{(j)}\ddot{q}^{(j)}+C^{(j)}\dot{q}^{(j)}+K^{(j)}q^{(j)}=P^{(j)} \qquad j=1,2\cdots n \tag{7.10}$$

式中$q^{(j)}$（$j=1,2\cdots n$）为正则坐标。展开成式（6.69）即

$$\{\delta\}=[U]\{q\}=\sum_{j=1}^{n}\{u^{(j)}\}q^{(j)}$$

时，$\{u^{(j)}\}q^{(j)}$各项就是各阶正则振型。这时，对各阶正则振型，质点位移之间保持一定的比值。换言之，所有质点总以同一相位振动。当这种正则振型存在时，往往称为系统具有经典正则振型。式（7.9）就是系统存在经典正则振型的充分必要条件。

另外，如将式（7.10）写成式（6.89）的形式

$$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=P^{(j)}/M^{(j)}$$

则振型阻尼比$h^{(j)}$可表示成

$$h^{(j)}=C^{(j)}/(2\omega^{(j)}M^{(j)}) \tag{7.11}$$

作为经典正则振型存在的充分条件——不一定是必要条件，可以有以下几种情况。

7.2.1 与质量成比例的阻尼

假设阻尼矩阵与质量矩阵成正比，即

$$[C]=a_0[M] \qquad a_0\text{：常数} \tag{7.12}$$

则有

$$[U]^T[C][U]=[U]^T(a_0[M])[U]$$
$$=a_0[U]^T[M][U]=a_0[M^{(j)}]$$

很明显满足正交条件式(7.9)。式(7.12) 的假设称为与质量成正比的阻尼假设。这时，由式

* Hart, G.C. & Vasudevan, R., Earthquake Design of Buildings, Damping Proc. ASCE, Vol.101, No.ST1. January 1975, pp.11-30.

(7.11)，有

$$h^{(j)}=a_0/(2\omega^{(j)})$$

只要指定了对应某阶振型的阻尼比，其它各阶振型的阻尼比就全部确定了。因为阻尼比与固有频率成反比，振型阶数越高，阻尼比就越小。

从物理上看，阻尼与质量成正比的假设，如图7.6(a)中所示，是在各质点与地面之间，即所谓系统的外部，设置其粘性与质量成正比的阻尼器。从这个意义来说，也可称为外部粘性型阻尼。

7.2.2 与刚度成比例的阻尼

假设阻尼矩阵与刚度矩阵成正比，即

$$[C]=a_1[K] \qquad a_1：常数 \tag{7.13}$$

则参照式(6.75)，就有

$$\begin{aligned}[U]^T[C][U]&=[U]^T(a_1[K])[U]\\&=a_1[U]^T[K][U]\\&=a_1[M^{(j)}][(\omega^{(j)})^2]\end{aligned}$$

满足式(7.9)。式(7.13)的假设称为与刚度成正比的阻尼，习惯上几乎都用这种假设。从物理上看，如图7.6(b)所示，就是在系统内各个质点之间设置弹簧常数和阻尼系数成正比的伏格特模型，所以也称为内部粘性阻尼。由式(7.11)，振型阻尼比为

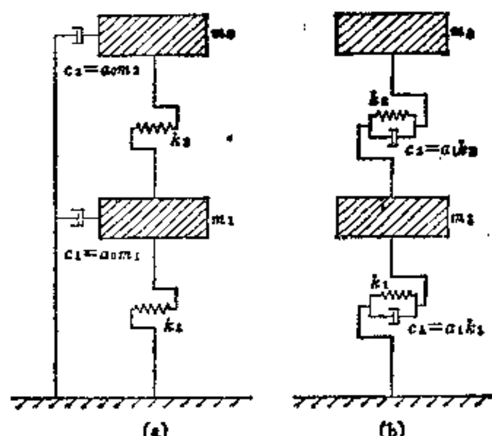


图7.6 与质量和刚度成正比的阻尼

$$h^{(j)}=a_1\omega^{(j)}/2 \tag{7.14}$$

它与固有频率成正比。所以，越是高阶的振型，其值越大。同样，如果指定对应某特定阶振型或特定固有周期的阻尼比，则所有各阶振型的阻尼比就都确定了。例如，给定了一阶振型的阻尼比由式(7.14)得$a_1=2h^{(1)}/\omega^{(1)}$，因此对任意阶数，有

$$h^{(j)}=h^{(1)}\omega^{(j)}/\omega^{(1)} \tag{7.15}$$

【例题7.1】假设例题6.8中系统的阻尼为内部粘性型阻尼（与刚度成正比的阻尼），并设一阶振型的阻尼比为5%，求各阶振型的阻尼比。

〔解〕因为对$\omega^{(1)}=17.71$rad/s

$h^{(1)}=0.050$，由式(7.15)

可得$h^{(j)}=0.05\omega^{(j)}/17.71$

$=0.002823\omega^{(j)}$

所以各阶振型的阻尼比如右表所列。

阶 数	$\omega^{(j)}$ (rad/s)	$h^{(j)}$
1	17.71	0.050
2	47.44	0.134
3	75.24	0.212
4	98.92	0.279
5	120.71	0.341

另外，如以式(6.90)所示矩阵[D]的形式来表示，则成

$$[D]=\begin{bmatrix}1.771&&&&\\&12.706&&&\\&&31.958&&\\&&&55.235&\\&&&&82.250\end{bmatrix} \tag{7.16}$$

将式(6.52)中的[M]、式(6.55)的[U]、式(7.16)的[D]和式(6.65)的$[M^{(j)}]^{-1}$

$[U]^T[M]$代入式（6.91），就得

$$[C]=\begin{bmatrix} 0.677 & -0.677 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.677 & 1.524 & -0.847 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.847 & 1.863 & -1.016 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.016 & 2.201 & -1.185 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.185 & 2.371 \end{bmatrix}$$

很容易验证，这个阻尼矩阵与式（6.53）所示系统的刚度矩阵成正比，是与刚度成正比型的阻尼。

7.2.3 瑞利型阻尼

假设阻尼矩阵是质量矩阵和刚度矩阵的线性组合，即

$$[C]=a_0[M]+a_1[K] \qquad a_0,\ a_1：常数 \tag{7.17}$$

显然有

$$[U]^T[C][U]=a_0[M^{(j)}]+a_1[M^{(j)}][(\omega^{(j)})^2]$$

满足正交条件。由式（7.11），阻尼比可表示成

$$h^{(j)}=\frac{1}{2}(a_0/\omega^{(j)}+a_1\omega^{(j)}) \tag{7.18}$$

如果指定对应两个特定频率的阻尼比，则可以将式（7.18）看作关于a_0和a_1的联立方程式，并由此求出常数a_0和a_1。例如，设对应一阶和二阶固有圆频率$\omega^{(1)}$，$\omega^{(2)}$的阻尼比分别为$h^{(1)}$，$h^{(2)}$，则得

$$\left.\begin{aligned} a_0&=2\omega^{(1)}\omega^{(2)}(h^{(1)}\omega^{(2)}-h^{(2)}\omega^{(1)})/[(\omega^{(2)})^2-(\omega^{(1)})^2] \\ a_1&=2(h^{(2)}\omega^{(2)}-h^{(1)}\omega^{(1)})/[(\omega^{(2)})^2-(\omega^{(1)})^2] \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

另外，式（7.18）所表示的阻尼比$h^{(j)}$随频率$\omega^{(j)}$的变化如图7.7所示。当

$$\omega^{(j)}=\sqrt{a_0/a_1}\equiv\omega^* \qquad (a)$$

时，有极小值

$$h_{\min}^{(j)}=\sqrt{a_0 a_1}=h^* \qquad (b)$$

由式（a）和式（b）可得$a_0=h^*\omega^*$，$a_1=h^*/\omega^*$。所以，式（7.18）也可写成

$$h^{(j)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^*}{\omega^{(j)}}+\frac{\omega^{(j)}}{\omega^*}\right)h^* \tag{7.20}$$

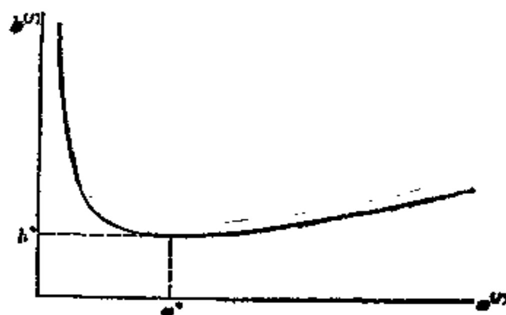


图7.7 瑞利型阻尼比和频率

【例题7.2】 假设例题6.8中的系统是瑞利型阻尼，并设一阶和二阶振型的阻尼比均为5%，求高阶振型的阻尼比。

〔解〕 因为对应$\omega^{(1)}=17.71$，$\omega^{(2)}=47.44$rad/s的阻尼比为$h^{(1)}=h^{(2)}=0.05$，所以式(7.19) 中

$$h^{(1)}\omega^{(2)}-h^{(2)}\omega^{(1)}=h^{(2)}\omega^{(2)}-h^{(1)}\omega^{(1)}=0.05(47.44-17.71)=1.4865$$

$$(\omega^{(2)})^2-(\omega^{(1)})^2=(47.44)^2-(17.71)^2=1936.9$$

于是

$$a_0/2=17.71\times47.44\times1.4865/1936.9=0.6448$$

$$a_1/2=1.4865/1936.9=0.0007675$$

式 (7.18) 变成

$$h^{(j)}=0.6448/\omega^{(j)}+0.0007675\omega^{(j)}$$

由此可得各阶振型的阻尼比如下表所示。

阶　数	$\omega^{(j)}$ (rad/s)	$h^{(j)}$	阶　数	$\omega^{(j)}$(rad/s)	$h^{(j)}$
1	17.71	0.060	4	98.92	0.082
2	47.44	0.050	5	120.71	0.098
3	75.24	0.066			

7.2.4 *Caughey*条件

对式 (7.8) 前乘$[U]^T([K][M]^{-1})$，再参照式 (6.75) 可得

$$\begin{aligned}[U]^T[K][M]^{-1}[K][U]&=[U]^T[K][M]^{-1}[M][U]\lceil\Omega^2\rfloor\\&=[U]^T[K][U]\lceil\Omega^2\rfloor\\&=\lceil M^{(j)}\rfloor\lceil\Omega^4\rfloor\end{aligned}\qquad(a)$$

很明显，右边是对角矩阵。再对式 (7.8) 前乘$[U]^T([K][M]^{-1})^2$，参照式 (a) 的结果，得

$$\begin{aligned}[U]^T([K][M]^{-1})^2[K][U]&=[U]^T[K][M]^{-1}[K][M]^{-1}[M][U]\lceil\Omega^2\rfloor\\&=[U]^T[K][M]^{-1}[K][U]\lceil\Omega^2\rfloor\\&=\lceil M^{(j)}\rfloor\lceil\Omega^6\rfloor\end{aligned}$$

等号右边也是对角矩阵。

同样，取b为任意正整数，对式 (7.8) 前乘$[U]^T([K][M]^{-1})^{b-1}$，参照乘上$[U]^T([K][M]^{-1})^{b-2}$所得的结果可以知道

$$[U]^T([K][M]^{-1})^{b-1}[K][U]=\lceil M^{(j)}\rfloor\lceil\Omega^{2b}\rfloor\qquad(b)$$

将式 (b) 左边写成

$$[U]^T([K][M]^{-1})^{b-1}[K][U]=[U]^T([M][M]^{-1})([K][M]^{-1})^{b-1}[K][U]$$

根据式 (5.20) 的结合律将$[M]^{-1}$和$[K]$的积括在一起，则式 (b) 可表示为

$$[U]^T[M]([M]^{-1}[K])^b[U]=\lceil M^{(j)}\rfloor\lceil\Omega^{2b}\rfloor\qquad(c)$$

等号右边是对角矩阵，因此可以知道式(c)左边的$[M]([M]^{-1}[K])^b$对任意正整数b均满足正交条件。

所以，如将阻尼矩阵写成$[M]([M]^{-1}[K])^b$的线性组合，即

$$[C]=[M]\sum_b a_b([M]^{-1}[K])^b\qquad a_b\text{：常数}\qquad(7.21)$$

则始终满足正交件条式 (7.9)。式 (7.21) 称为*Caughey*条件，它是经典正则振型存在之充分条件的最一般表达形式*。

设式 (7.21) 中$b=0$，$b=1$和$b=0$，1则明显可得

$b=0$　　$[C]=a_0[M]$　　　与质量成正比的阻尼

$b=1$　　$[C]=a_1[K]$　　　与刚度成正比的阻尼

$b=0,1$　　$[C]=a_0[M]+a_1[K]$　　瑞利型阻尼

根据式 (c)，从式 (7.21) 可得

* Caughey, T.K.: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, June 1960, pp.269-271.

$$[U]^T[C][U]=[M^{(j)}]\sum_b a_b[\Omega^{2b}]$$

因此，由式（7.11）可得

$$h^{(j)}=\frac{1}{2}\sum_b a_b(\omega^{(j)})^{2b-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{\omega^{(j)}}+a_1\omega^{(j)}+a_2(\omega^{(j)})^3+\cdots+a_{b-1}(\omega^{(j)})^{2b-3}\right] \tag{7.22}$$

即

$$\begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(b)} \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega^{(1)} & \omega^{(1)} & (\omega^{(1)})^3 & \cdots(\omega^{(1)})^{2b-3} \\ 1/\omega^{(2)} & \omega^{(2)} & (\omega^{(2)})^3 & \cdots(\omega^{(2)})^{2b-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/\omega^{(b)} & \omega^{(b)} & (\omega^{(b)})^3 & \cdots(\omega^{(b)})^{2b-3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{b-1} \end{Bmatrix} \tag{7.23}$$

给定b组的$\omega^{(j)}$，$h^{(j)}$就可确定系数$a_0, a_1\cdots a_{b-1}$，由式(7.22)就可算出对任意阶振型的阻尼比。

【例题7.3】 计算例题6.8所示系统对埃森特罗1940南北分量地震动的反应。这个地震动的无阻尼速度反应谱对应系统的一、三、五阶固有周期时的谱值如右表所列（参见图3.11）。参考图7.5，当对应这些振型的阻尼比采用右表$h^{(j)}$栏所示值时，试确定满足*Caughey*条件的二阶和四阶振型的阻尼比。

阶 数	$T^{(j)}$ (s)	$S_V(T^{(j)}, 0)$ (cm/s)	$h^{(j)}$
1	0.355	68.4	0.06
3	0.084	15.8	0.02
5	0.052	4.8	0.01

〔解〕 $\omega^{(1)}=17.71, \omega^{(3)}=75.24, \omega^{(5)}=120.71$ rad/s所以

$$\begin{bmatrix} 1/\omega^{(1)} & \omega^{(1)} & (\omega^{(1)})^3 \\ 1/\omega^{(3)} & \omega^{(3)} & (\omega^{(3)})^3 \\ 1/\omega^{(5)} & \omega^{(5)} & (\omega^{(5)})^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.056465 & 17.71 & 5555 \\ 0.013291 & 75.24 & 425938 \\ 0.008284 & 120.71 & 1758853 \end{bmatrix}$$

由式（7.23）得

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}=2\begin{bmatrix} 0.056465 & 17.71 & 5555 \\ 0.013291 & 75.24 & 425938 \\ 0.008284 & 120.71 & 1758853 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 0.06 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{Bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix} 19.161 & -7.217 & 1.687 \\ -0.4700\times10^{-2} & 2.3506\times10^{-2} & -0.5677\times10^{-2} \\ 0.2323\times10^{-6} & -1.5792\times10^{-6} & 0.9502\times10^{-6} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.06 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{Bmatrix}$$

$$=2\begin{Bmatrix} 1.0222 \\ 0.1314\times10^{-3} \\ -0.8144\times10^{-8} \end{Bmatrix}$$

代入式（7.22）成

$$h^{(j)}=1.0222/\omega^{(j)}+0.1314\times10^{-3}\cdot\omega^{(j)}-0.8144\times10^{-8}\cdot(\omega^{(j)})^3$$

由此算出对应$\omega^{(2)}=47.44$，$\omega^{(4)}=98.92$ rad/s的$h^{(2)}$，$h^{(4)}$，与给定的一、三、五阶振型的阻尼比一起列于下表。

阶 数	$h^{(j)}$	阶 数	$h^{(j)}$	阶 数	$h^{(j)}$
1	0.060	3	0.020	5	0.010
2	0.027	4	0.015		

7.2.5 与能量成比例的阻尼

到上一节为止，论述了为使运动方程式中的阻尼项解耦的条件，即为使式（7.9）的正交条件成立的条件，以及为此所作的几种假设。还论述了当这种条件不能严格满足时，引入解耦的假设：忽略式（6.84）所示矩阵$[U]^T[C][U]$的非对角元素而仅着眼于式（6.85）所示的如下主对角元素

$$C^{(j)}=\{u^{(j)}\}^T[C]\{u^{(j)}\} \qquad j=1,2\cdots n \tag{a}$$

根据这种假设，由式（7.11），即

$$h^{(j)}=C^{(j)}/(2\omega^{(j)}M^{(j)}) \qquad j=12\cdots n \tag{b}$$

就可确定振型阻尼比$h^{(j)}$。

振型阻尼比是与整个系统有关的特性，而有关各构件的阻尼特性至此尚未触及。后面将要讲到，当整个结构物是由大致相同的结构材料组成时，对应同一振型的构件阻尼比与系统整体的阻尼比是一致的。但当同一结构物内，例如钢筋混凝土、劲性钢筋混凝土和型钢等构件混合存在，而想对各个部分给出不同的阻尼特性即所谓各部分的阻尼时，与系统整体的振型阻尼比的关系如何就成问题了。为了确定这种关系，有必要对式（a）所示主对角元素的内容略加考虑。

设系统内连结质点i和质点j的构件的阻尼系数为c_{ij}，注意在这一节中不要把质点编号j与带括号的振型阶数（j）混淆不分。考虑最一般的情况，即设所有质点都与其它质点连结在一起。根据阻尼影响系数的定义，作用于质点i，j之间的阻尼力与两个质点之间的相对速度$\dot{\delta}_i-\dot{\delta}_j$成正比，等于$c_{ij}(\dot{\delta}_i-\dot{\delta}_j)$。因此，运动方程式（6.29）中有阻尼项$[c]\{\dot{\delta}\}$的各行，可以分别写成如下形式：

$$\begin{array}{ll}c_{12}(\dot{\delta}_1-\dot{\delta}_2)+c_{13}(\dot{\delta}_1-\dot{\delta}_3)+\cdots+c_{1,n-1}(\dot{\delta}_1-\dot{\delta}_{n-1})+c_{1n}(\dot{\delta}_1-\dot{\delta}_n) & \vdots +c_{10}(\dot{\delta}_1-\dot{\delta}_0)\\ c_{21}(\dot{\delta}_2-\dot{\delta}_1)\qquad +c_{23}(\dot{\delta}_2-\dot{\delta}_3)+\cdots+c_{2,n-1}(\dot{\delta}_2-\dot{\delta}_{n-1})+c_{2n}(\dot{\delta}_2-\dot{\delta}_n) & \vdots +c_{20}(\dot{\delta}_2-\dot{\delta}_0)\\ \cdots\cdots & \\ c_{n1}(\dot{\delta}_n-\dot{\delta}_1)+c_{n2}(\dot{\delta}_n-\dot{\delta}_2)+c_{n3}(\dot{\delta}_n-\dot{\delta}_3)+\cdots+c_{n,n-1}(\dot{\delta}_n-\dot{\delta}_{n-1}) & \vdots +c_{n0}(\dot{\delta}_n-\dot{\delta}_0)\end{array}$$

虚线右边的项是作用于连结质点与系统固定点的构件上的阻尼力，$\dot{\delta}_0$表示固定点的速度($\dot{\delta}_0=0$)。考虑最一般的情况，即设所有质点都用构件与固定点连结在一起。显然，上式中，当质点之间或质点与固定点之间没有连结时有$c_{ij}=0$。故上式第i行变成

$$\begin{aligned}&(c_{i1}+c_{i2}+\cdots c_{i,i-1}+c_{i,i+1}+\cdots+c_{in}+c_{i0})\dot{\delta}_i\\ &-c_{i1}\dot{\delta}_1-c_{i2}\dot{\delta}_2-\cdots-c_{i,i-1}\dot{\delta}_{i-1}-c_{i,i+1}\dot{\delta}_{i+1}-\cdots,\ -c_{in}\dot{\delta}_n-c_{i0}\dot{\delta}_0\end{aligned} \tag{c}$$

另一方面$[C]\{\dot{\delta}\}$的第i分量为

$$C_{i1}\dot{\delta}_1+C_{i2}\dot{\delta}_2+\cdots+C_{ii}\dot{\delta}_i+\cdots+C_{in}\dot{\delta}_n+C_{i0}\dot{\delta}_0 \tag{d}$$

最后一项为0，只是在形式上加上这一项而已。比较式（c）与式（d）可知，阻尼影响系数与各部分阻尼系数之间有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} C_{ii} &= \sum_{j=0}^{n} c_{ij} \qquad (c_{ii}=0) \\ C_{ij} &= C_{ji} = -c_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

然而，展开式（a）的主对角元素$\{u^{(j)}\}^T[C]\{u^{(j)}\}$，就得到如式（5.28）所示的结果（这里暂时省略表示阶数的（j））：

$$\begin{aligned}\{u\}^T[C]\{u\} = & C_{11}u_1^2 + C_{12}u_1u_2 + \cdots + C_{1n}u_1u_n \\ & + C_{21}u_1u_2 + C_{22}u_2^2 + \cdots + C_{2n}u_2u_n \\ & \cdots\cdots \\ & + C_{n1}u_1u_n + C_{n2}u_2u_n + \cdots + C_{nn}u_n^2\end{aligned}$$

代入式（e）得

$$\begin{aligned}\{u\}^T[C]\{u\} = & \ 0 + c_{12}(u_1^2 - u_1u_2) + \cdots + c_{1n}(u_1^2 - u_1u_n) + c_{10}u_1^2 \\ & + c_{12}(u_2^2 - u_1u_2) + 0 + \cdots + c_{2n}(u_2^2 - u_2u_n) + c_{20}u_2^2 \\ & \cdots\cdots \\ & + c_{1n}(u_n^2 - u_1u_n)c_{2n}(u_n^2 - u_2u_n) + \cdots + 0 + c_{n0}u_n^2\end{aligned}$$

因此，可以表示成

$$C^{(j)} = \{u^{(j)}\}^T[C]\{u^{(j)}\} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}(u_i^{(j)} - u_j^{(j)})^2 \tag{f}$$

与推导出式（f）完全相同，很容易证明，如设连结质点i和j的构件ij的弹簧常数为k_{ij}，则可以表示成

$$K^{(j)} = \{u^{(j)}\}^T[K]\{u^{(j)}\} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} k_{ij}(u_i^{(j)} - u_j^{(j)})^2 \tag{g}$$

同时，根据式（6.76），有如下关系：

$$M^{(j)} = K^{(j)}/(\omega^{(j)})^2 \tag{h}$$

a．各构件的阻尼为内部粘性型

设构件ij的阻尼为内部粘性型，相应于频率$\omega^{(j)}$的构件阻尼比为$h_{ij}^{(j)}$，则由式（7.5）得

$$c_{ij} = 2h_{ij}^{(j)}k_{ij}/\omega^{(j)} \tag{i}$$

将式（f）、（h）、（g）、（i）代入式（b），得

$$h^{(j)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} h_{ij}^{(j)} \cdot k_{ij}(u_i^{(j)} - u_j^{(j)})^2}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} k_{ij}(u_i^{(j)} - u_j^{(j)})^2} \tag{7.24}$$

式中的$\frac{1}{2}k_{ij}(u_i^{(j)} - u_j^{(j)})^2$是系统处于$j$阶振型状态时构件$ij$内积累的最大势能。因此，式（7.24）表示：以各构件j阶振型时的最大势能为权的各构件j阶阻尼比$h_{ij}^{(j)}$的带权平均值就是系统整体的j阶振型阻尼比$h^{(j)}$。或者也可以认为与各构件最大势能成正比的能量由于阻尼存在而消耗。式（7.24）称为多质点阻尼系统的皮格斯-罗塞特（Biggs-Roesset）方

程式[12]。

当各构件的阻尼比$h_i^{(j)}$全部相等时，式（7.24）成

$$h^{(j)}=h_i^{(j)}$$

另外，当系统为图6.16所示的串接剪切模型时，式（7.24）可表示成

$$h^{(j)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^{(j)}\cdot k_i(u_{i-1}^{(j)}-u_i^{(j)})^2}{\sum_{i=1}^{n} k_i(u_{i-1}^{(j)}-u_i^{(j)})^2} \tag{7.25}$$

b．各构件的阻尼为滞回阻尼型

由式（7.3）有$c_{ij}=c_{ij}^*/\omega^{(j)}$（$c_{ij}^*$：各构件的常数），同时由式(7.7）有$h_i^{(j)}=c_{ij}^*/(2k_{ij})$，从两式中消去$c_{ij}^*$，便得$c_{ij}=2h_i^{(j)}k_{ij}/\omega^{(j)}$，与式（i）形式相同。因此，振型阻尼比与各部分阻尼比的关系可用与式（7.24）或（7.25）形式上相同的式子来表示。

但对于内部粘性型阻尼，$h_i^{(j)}$是与频率$\omega^{(j)}$成正比的量，所以$h^{(j)}$也随直接与$\omega^{(j)}$有关的振型阶数而改变。对于滞迴阻尼型，$h_i^{(j)}$是与$\omega^{(j)}$无关的常数，$h^{(j)}$只取决于振型矢量$\{u^{(j)}\}$的值而随阶数变化。

【例题7.4】 假设例题6.8中的系统为内部粘性阻尼，一阶振型时各部分的阻尼比，即第1层至第5层构件的阻尼比，分别为第1层5%，第2层3%，第3层以上2%。求系统各阶振型的阻尼比。

〔解〕 因为是内部粘性阻尼，各部分的各阶振型阻尼比与固有圆频率成正比，首先求出这些值如下：

阶数	$\omega^{(j)}$ (rad/s)	各部分阻尼比		
1	17.71	$h_1^{(1)}=0.050$	$h_2^{(1)}=0.030$	$h_3^{(1)}=h_4^{(1)}=h_5^{(1)}=0.020$
2	47.44	$h_1^{(2)}=0.134$	$h_2^{(2)}=0.080$	$h_3^{(2)}=h_4^{(2)}=h_5^{(2)}=0.054$
3	75.24	$h_1^{(3)}=0.212$	$h_2^{(3)}=0.127$	$h_3^{(3)}=h_4^{(3)}=h_5^{(3)}=0.085$
4	98.92	$h_1^{(4)}=0.279$	$h_2^{(4)}=0.168$	$h_3^{(4)}=h_4^{(4)}=h_5^{(4)}=0.112$
5	120.71	$h_1^{(5)}=0.341$	$h_2^{(5)}=0.204$	$h_3^{(5)}=h_4^{(5)}=h_5^{(5)}=0.136$

然后由例题6.8中求出的固有函数值来计算各阶各部分的$k_i(u_{i-1}^{(j)}-u_i^{(j)})^2$值，结果如下：

层次	k_i	$k_i(u_{i-1}^{(j)}-u_i^{(j)})^2$				
i	(t/cm)	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
5	120	1.025	39.04	109.9	73.8	6.5
4	150	2.372	29.64	8.2	202.5	69.1
3	180	3.433	2.20	87.4	26.4	253.4
2	210	3.977	6.91	7.0	98.1	295.2
1	210	4.646	32.10	57.7	55.4	48.4
合计		15.45	109.9	270.2	456.2	672.6

12) Dobry R., Whitman, R.V.& Roesset, J.M., Soil Properties and the One-Dimensional Theory of Earthquake Amplification, Research Report R71-18, Dept.of Civil Engineering, MIT, May 1971.

这样，由式（7.25）可以算出系统各阶阻尼比如下：

$h^{(1)}=(0.020\times1.025+0.020\times2.372+0.020\times3.433+0.030\times3.977+0.050\times4.646)/15.45=0.488/15.45=0.032$

$h^{(2)}=(0.054\times39.04+0.054\times29.64+0.054\times2.20+0.080\times6.91+0.134\times32.10)/109.9=8.681/109.9=0.079$

$h^{(3)}=(0.085\times109.9+0.085\times8.2+0.085\times87.4+0.127\times7.0+0.212\times57.7)/270.2=30.59/270.2=0.113$

$h^{(4)}=(0.112\times73.8+0.112\times202.5+0.112\times26.4+0.168\times98.1+0.279\times55.4)/456.2=65.84/456.2=0.144$

$h^{(5)}=(0.136\times6.5+0.136\times69.1+0.136\times253.4+0.204\times295.2+0.341\times48.4)/672.6=121.47/672.6=0.181$

【例题7.5】 假设上一例题中阻尼是滞迴型的，求系统各阶振型的阻尼比。

〔解〕 因为是滞迴阻尼，故与各振型的固有频率无关，$h_1^{(j)}=0.05, h_2^{(j)}=0.03$，$h_3^{(j)}=h_4^{(j)}=h_5^{(j)}=0.02$（$j=1,2\cdots5$）。$k_i(u_{i-1}-u_i)^2$的值与上例相同，代入式（7.25）作与上题相同的运算，即可求出振型阻尼比$h^{(j)}$（$j=1,2\cdots5$）。请读者自己计算，其结果与上例相比较如下表所列。

阶　数	振型阻尼比$h^{(j)}$		阶　数	振型阻尼比$h^{(j)}$	
	内部粘性型	滞回阻尼型		内部粘性型	滞回阻尼型
1	0.032	0.032	4	0.144	0.026
2	0.079	0.029	5	0.181	0.026
3	0.113	0.027			

7.3　有阻尼振动的精确解

如式（6.29）所示，多质点阻尼系统的运动方程由下式给出：

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\} \tag{7.26}$$

按惯用的方法（即本书6.4节和6.5节中主要讲述的方法）求解这个方程式，即：

(i) 在上式中设$[C]=0$，$[P]=0$，对这样得到的无阻尼自由振动方程式$[M]\{\ddot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{0\}$，假设其解为$\{\delta\}=\{u\}e^{ipt}$，解这个固有值问题的方程式$[K]\{u\}=p^2[M]\{u\}$，求出振型矩阵$[U]$。

(ii) 作坐标变换$\{\delta\}=[U]\{q\}$，使式（7.26）中有关$[M]$和$[K]$的项对角化。但除了阻尼矩阵满足*Caughey*条件等特殊情况外，有关$[C]$的项一般不是对角化的。

(iii) 引入解耦的假设，得到关于坐标$\{q\}$的独立方程式，把这些解叠加起来，可求出系统的反应。

在(iii)中由于假定可解耦而用振型叠加法求得的解一般是近似解。而用直接积分法解式(7.26)时，似乎可以求得精确解。但由于对$[C]$的元素的阻尼系数不够了解，故不得不首先根据经验来设定阻尼比，构成式（6.90）所示的对角矩阵$[D]$，再对此作式（6.91）的变换，

以确定阻尼矩阵$[C]$。也就是说，在这个过程中仍依赖于解耦的假设[13]。

但当具有任意的阻尼矩阵时，求式（7.26）所示运动方程式的精确解也决非不可能[14]。本节将对这种方法及与此有关的若干事项作一介绍。

7.3.1 复固有值

根据式（7.26），多质点阻尼系统的自由振动方程式为

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{0\} \tag{7.27}$$

式中$[M]$、$[C]$、$[K]$均为对称矩阵，且$[M]$和$[K]$为正定的。如有动态位移，必定要消耗能量，因为有阻尼的作用，阻尼矩阵$[C]$也可认为是正定的。另外，本节将矩阵的对称性进一步扩大到考虑$[M]$、$[C]$、$[K]$为埃尔米特矩阵。

假定解的形式为$\{\delta\}=\{u\}e^{pt}$，代入式（7.27）得

$$([M]p^2+[C]p+[K])\{u\}=\{0\} \tag{7.28}$$

式（7.28）是认真考虑阻尼时的固有值问题方程式。其对应的固有方程式，即式（7.28）具有意义解的条件为

$$\det([M]p^2+[C]p+[K])=0 \tag{7.29}$$

设系统的自由度为n，式（7.29）的右边是p的$2n$次式，所以可以求出$2n$个根即固有值，同时对应这$2n$个固有值可确定$2n$个线性独立的固有矢量$\{u\}$。

一般$\{u\}$是复矢量，设其共轭矢量为$\{\bar{u}\}$，对固有值问题方程式（7.28）前乘$\{\bar{u}\}^T$，便得关于p的二次方程式

$$Mp^2+Cp+K=0 \tag{a}$$

式中系数分别为$M=\{\bar{u}\}^T[M]\{u\}$，$C=\{\bar{u}\}^T[C]\{u\}$，$K=\{\bar{u}\}^T[K]\{u\}$。因为它们都是埃尔米特形式，根据定理9，都是实数。同时，矩阵$[M]$、$[C]$、$[K]$是正定值，所以都是正实数。因此，式（a）是实系数二次方程式，如设

$$a=\frac{C}{M}=\frac{\{\bar{u}\}^T[C]\{u\}}{\{\bar{u}\}^T[M]\{u\}}$$

$$b=\frac{K}{M}=\frac{\{\bar{u}\}^T[K]\{u\}}{\{\bar{u}\}^T[M]\{u\}}$$

则式（a）可写成

$$P^2+aP+b=0 \qquad a>0,\ b>0 \tag{b}$$

另外，一般结构物阻尼力远比刚度产生的恢复力小，所以可以认为有如下关系

$$0<a\ll b \tag{c}$$

求式（b）的根为

$$p=-\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b} \tag{d}$$

根据式（c）的条件，上式根号因为负数，所以很明显式（d）是实部为负的共轭复数。即式（7.28）形式的固有值问题方程式在一般情况下省几组共轭复数固有值。同时，从式(7.28)

13）在下列文献中，介绍不经过这种过程而直接求阻尼矩阵的方法：高橋啓元、内田一義、井上雅佑、民家浩司、宮下丘、岩田祐喜雄，構造物と地盤の減衰性の相違を考慮した地震応答，鹿岛建设技術研究報告会報文集，昭和43年11月。
武藤清、内田一義、井上雅佑、岩田祐喜雄，BWR型原子力発电所の耐震设计に関する研究(之の二)，振動応答解析について，日本建筑学会大会学術講演梗概集(北海道)，昭和44年8月。
武藤清、小林俊夫：原子炉施设の耐震设计に慣用されている各種減衰理论の比较研究，日本建筑学会论文報告集，第255号，昭和52年5月。

14）Foss, F A., Co-ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, September 1958, pp.361—364.

还可以很容易推导出与共轭固有值对应的固有矢量是互为共轭的复矢量。

设第 j 组固有值为 $p^{(j)}=-\xi^{(j)}\pm i\zeta^{(j)}$，与单质点阻尼系统时的式（2.40）对比，有

$$\xi^{(j)}=h^{(j)}\omega^{(j)}, \qquad \zeta^{(j)}=\omega^{(j)}\sqrt{1-(h^{(j)})^2}$$

这里第 j 阶固有圆频率和振型阻尼比分别为

$$\left.\begin{aligned}\omega^{(j)}&=\sqrt{(\xi^{(j)})^2+(\zeta^{(j)})^2}\\ h^{(j)}&=\xi^{(j)}/\sqrt{(\xi^{(j)})^2+(\zeta^{(j)})^2}\end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

这里的阶数 j 也从 $\omega^{(j)}$ 值小的一方数起。

【例题7.6】 设例题4.1两质点系中的阻尼系数为 $c_1=1.0$，$c_2=0.6\text{t}\cdot\text{s/cm}$，求固有圆频率及振型阻尼比。

〔解〕式（7.27）的自由振动方程式为

$$\begin{bmatrix}0.055 & \\ & 0.050\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_2\\ \ddot{x}_1\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.6 & -0.6\\ -0.6 & 1.6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_1\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}120 & -120\\ -120 & 240\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_2\\ x_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

式（7.29）固有方程式为

$$\begin{vmatrix}0.055p^2+0.6p+120 & -(0.6p+120)\\ -(0.6p+120) & 0.050p^2+1.6p+240\end{vmatrix}=0$$

即

$$(0.055p^2+0.6p+120)(0.050p^2+1.6p+240)-(0.6p+120)^2=0$$

或

$$0.00275p^4+0.118p^3+19.8p^2+192.0p+14400.0=0 \tag{c}$$

上式为四次方程式，注意列式中包含 p 的奇次项，因而不是式（4.8）那样只有偶次项的复二次方程式。式(c)的根为

$$p^{(1)}=-3.1450\pm29.0980i$$
$$p^{(2)}=-18.3090\pm76.0108i$$

因此根据式（7.30），固有圆频率及振型阻尼比如下：

$$\omega^{(1)}=\sqrt{(3.1450)^2+(29.0980)^2}=29.267\text{rad/s}$$
$$\omega^{(2)}=\sqrt{(18.3090)^2+(76.0108)^2}=78.185\text{rad/s}$$
$$h^{(1)}=3.1450/29.267=0.107$$
$$h^{(2)}=18.3090/28.185=0.234$$

7.3.2 福斯(Foss)解法[1,2]

a.运动方程式的降阶

当系统自由度为 n 时，式（7.26）所示多质点阻尼系统的运动方程式是个 n 元二阶联立方程式。众所周知，引入适当的辅助变量后，任意阶的联立微分方程式可以降为等效的一阶联立微分方程式。这里将式（7.26）中的 $\{\dot{\delta}\}$ 看作辅助变量是合适的[16]。为此，先考虑如下的恒等式：

$$-[K]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\dot{\delta}\}=\{0\} \tag{a}$$

---

16) 武藤清、小林俊夫，各部別減衰振動系のモーダルアナリシス法，日本建筑学会論文報告集，第204号，昭和48年2月.

16) Frazer,R.A., Duncan,W.J.& Collar, A.R.: Elementary Matrices,Cambridge University Press, London,1946.P.327.

将式(a)与式(7.26)结合在一起，用$2n$元的矩阵来表示，则成

$$\begin{bmatrix}[M] & [0]\\ [0] & -[K]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{\delta}\}\\ \{\dot{\delta}\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[C] & [K]\\ [K] & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{\delta}\}\\ \{\delta\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{P\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{7.31}$$

将上式展开很容易知道它是与式(a)和式(7.26)等价的。另外，如设

$$\begin{bmatrix}[C] & [K]\\ [K] & [0]\end{bmatrix}\equiv[A]\quad \begin{bmatrix}[M] & [0]\\ [0] & -[K]\end{bmatrix}\equiv[B]\qquad \begin{Bmatrix}\{\dot{\delta}\}\\ \{\delta\}\end{Bmatrix}\equiv\{\Delta\}\qquad \begin{Bmatrix}\{P\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}\equiv\{Q\} \tag{7.32}$$

则式(7.31)可表示成

$$[B]\{\dot{\Delta}\}+[A]\{\Delta\}=\{Q\} \tag{7.33}$$

上式称为n元二阶联立微分方程式(7.26)的降阶形式，它是变量$\{\Delta\}$的$2n$元一阶联立微分方程式。$[A]$和$[B]$都是对称的实矩阵。

b. 自由振动解

首先考虑自由振动。设式(7.26)中的$\{P\}=\{0\}$，则式(7.33)成

$$[B]\{\dot{\Delta}\}+[A]\{\Delta\}=\{0\} \tag{b}$$

假定式(b)的解为$\{\Delta\}=\{v\}e^{\lambda t}$，代入式(b)得关于未知数$\lambda$和未知矢量$\{v\}$的方程式

$$[A]\{v\}=-\lambda[B]\{v\} \tag{7.34}$$

这就是在现在情况下的固有值问题方程式。

$[B]$是正则矩阵，所以有逆矩阵$[B]^{-1}$存在。对式(7.34)前乘$[B]^{-1}$，就成$[B]^{-1}[A]\{v\}=-\lambda\{v\}$，根据定理6，有

$$[B]^{-1}=\begin{bmatrix}[M]^{-1} & [0]\\ [0] & -[K]^{-1}\end{bmatrix}$$

所以，如取

$$\begin{aligned}[R]&=-[B]^{-1}[A]\\ &=\begin{bmatrix}[M]^{-1} & [0]\\ [0] & -[K]^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[C] & [K]\\ [K] & [0]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K]\\ [I] & [0]\end{bmatrix}\end{aligned}$$

则式(7.34)的固有值问题方程式可表示成

$$[R]\{v\}=\lambda\{v\} \tag{7.35}$$

$2n$次的矩阵$[R]$是非对称矩阵，在实数范围内不能象式(6.44)那样对称化。所以，式(7.35)是所谓非对称实矩阵的固有值问题。在7.3.1节中已经说过，它给出n组共轭复固有值和共轭复固有矢量。同时，如果$\{\delta\}=\{u\}e^{\lambda t}$则$\{\dot{\delta}\}=\lambda\{u\}e^{\lambda t}$，从式(7.32)的第3式可以看出，由式(7.35)求出的矢量$\{v\}$是

$$\{v\}=\begin{Bmatrix}\lambda\{u\}\\ \{u\}\end{Bmatrix} \tag{c}$$

以$2n$个固有矢量为列的$2n$次复数方矩阵，即

$$[V]=[\{v^{(1)}\}\{\bar{v}^{(1)}\}\{v^{(2)}\}\{\bar{v}^{(2)}\}\cdots\{v^{(n)}\}\{\bar{v}^{(n)}\}] \tag{7.36}$$

在这里是振型矩阵。以复固有值λ为主对角元素的$2n$次对角矩阵则为谱矩阵，即

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix}\lambda^{(1)} &&&&&& \\ & \overline{\lambda}^{(1)} &&&&& \\ && \lambda^{(2)} &&&& \\ &&& \overline{\lambda}^{(2)} &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& \lambda^{(n)} & \\ &&&&&& \overline{\lambda}^{(n)}\end{bmatrix} \tag{7.37}$$

根据式(c)，振型矩阵可表示成

$$[V]=\begin{bmatrix}[U]\cdot[\Lambda] \\ [U]\end{bmatrix} \tag{7.38}$$

式中$[v]$是n行$2n$列的矩阵

$$[v]=[\{u^{(1)}\}\{\bar{u}^{(1)}\}\{u^{(2)}\}\{\bar{u}^{(2)}\}\cdots\{u^{(n)}\}\{\bar{v}^{(n)}\}]$$

这些式子中的$\overline{\lambda}^{(j)}$，$\bar{u}^{(j)}$，$\bar{v}^{(j)}$（$j=1,2\cdots n$）分别表示$\lambda^{(j)}$，$u^{(j)}$，$v^{(j)}$的共轭复数。

式（7.34）的解可以用振型矩阵和谱矩阵表示成

$$[A][V]=-[B][V][\Lambda] \tag{7.39}$$

c.固有矢量的正交性

对复固有矢量，也可用与证明实固有值时的定理11完全相同的方法来证明其正交性。即由式（7.34）有

$$\lambda^{(r)}[B]\{v^{(r)}\}=-[A]\{v^{(r)}\}，\lambda^{(s)}[B]\{v^{(s)}\}=-[A]\{v^{(s)}\}$$

将第1式转置再后乘$\{v^{(s)}\}$，对第2式前乘$\{v^{(r)}\}^T$，并注意$[A]$和$[B]$都是对称矩阵，则得

$$\lambda^{(r)}\{v^{(r)}\}^T[B]\{v^{(s)}\}=-\{v^{(r)}\}^T[A]\{v^{(s)}\}$$

$$\lambda^{(s)}\{v^{(r)}\}^T[B]\{v^{(s)}\}=-\{v^{(r)}\}^T[A]\{v^{(s)}\}$$

两式相减得$(\lambda^{(r)}-\lambda^{(s)})(\{v^{(r)}\}^T[B]\{v^{(s)}\})=0$因为$\lambda^{(r)}-\lambda^{(s)}\neq 0$，所以可得如下正交关系

$$\left.\begin{aligned}\{v^{(r)}\}^T[B]\{v^{(s)}\}=0 \\ \{v^{(r)}\}^T[A]\{v^{(s)}\}=0\end{aligned}\right\} r\neq s \tag{7.40}$$

现在设$\{v^{(j)}\}^T[B]\{v^{(j)}\}=\mu^{(j)}$，$\{v^{(j)}\}^T[A]\{v^{(j)}\}=\kappa^{(j)}$，则与式（5.56）的情况相同，固有矢量的正交性可以用振型矩阵表示为

$$\left.\begin{aligned}[V]^T[B][V]=[\mu^{(j)}] \\ [V]^T[A][V]=[\kappa^{(j)}]\end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

另外，可以知道如将$[V]^T$前乘式（7.39），则有如下关系

$$[\kappa]=-[\mu][\Lambda] \tag{7.42}$$

d.暂态振动方程式——对地面运动的反应

考虑剪切型n个质点的阻尼系统受地面运动作用的情况。设各质点对地表的相对位移为x_i（$i=1,2\cdots n$），地面运动位移为y，则运动方程如式（6.96）所示，即

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=-\ddot{y}[M]\{1\} \tag{d}$$

与式(a)相同，考虑如下恒等式

$$-[K]\{\dot{x}\}+[K]\{\dot{x}\}=\{0\} \tag{e}$$

将式(d)和式(e)结合在一起，可表示成

$$\begin{bmatrix}[M] & [0] \\ [0] & -[K]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{x}\} \\ \{\dot{x}\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[C] & [K] \\ [K] & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{x}\} \\ \{x\}\end{Bmatrix}=-\ddot{y}\begin{Bmatrix}[M] & \{1\} \\ & \{0\}\end{Bmatrix}$$

将等号右边改写后，上式可写成

$$\begin{bmatrix}[M] & [0] \\ [0] & -[K]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{x}\} \\ \{\dot{x}\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[C] & [K] \\ [K] & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{x}\} \\ \{x\}\end{Bmatrix}=-\ddot{y}\begin{bmatrix}[M] & [0] \\ [0] & -[K]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{1\} \\ \{0\}\end{Bmatrix}$$

利用式（7.32）的符号可表示成

$$[B]\{\dot{X}\}+[A]\{X\}=-\ddot{y}[B]\{E\} \tag{7.34}$$

式中

$$\{X\}=\begin{Bmatrix}\{\dot{x}\} \\ \{x\}\end{Bmatrix} \qquad \{E\}=\begin{Bmatrix}\{1\} \\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{7.44}$$

作坐标变换

$$\{X\}=[V]\{q\} \tag{7.45}$$

并将式（7.45）代入式（7.43），则得

$$[B][V]\{\dot{q}\}+[A][V]\{q\}=-\ddot{y}[B]\{E\}$$

前乘$[V]^T$后成为

$$[V]^T[B][V]\{\dot{q}\}+[V]^T[A][V]\{q\}=-\ddot{y}[V]^T[B]\{E\}$$

由式（7.41）可得

$$[\mu]\{\dot{q}\}+[\kappa]\{q\}=-\ddot{y}[V]^T[B]\{E\} \tag{f}$$

定义矢量$\{\beta\}$为

$$\{\beta\}=2[\mu]^{-1}[V]^T[B]\{E\} \tag{7.46}$$

称该矢量的分量为复参与系数。在后面将会知道，等号右边的系数 2 只是为了便于表示才加上的。利用这种复参与系数，式(f)可表示成

$$[\mu]\{\dot{q}\}+[\kappa]\{q\}=-\frac{1}{2}[\mu]\{\beta\}\ddot{y} \tag{g}$$

由式（7.42）可得如下关系：$[\mu]^{-1}[\kappa]=-[\Lambda]$。所以对式(g)前乘$[\mu]^{-1}$可得

$$\{\dot{q}\}-[\Lambda]\{q\}=-\frac{1}{2}\{\beta\}\ddot{y} \tag{7.47}$$

谱矩阵$[\Lambda]$是对角矩阵，所以式（7.47）可分解为解耦振型的$2n$个独立方程式。

式（7.37）所示$[\Lambda]$的主对角元素是交替排列的互为共轭的复固有值。同时，振型矩阵$[V]$的组成如式（7.36）所示。所以，很容易看出，矩阵$[\mu]$也是交替排列着共轭复数的对角矩阵。因此，很容易理解复参与系数的组成如下：

$$\{\beta\}=\begin{Bmatrix}\beta^{(1)} \\ \overline{\beta}^{(1)} \\ \vdots \\ \beta^{(n)} \\ \overline{\beta}^{(n)}\end{Bmatrix}$$

所以，将式（7.47）按振型分解就可写成

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}^{(j)}-\lambda^{(j)}q^{(j)}&=-\frac{1}{2}\beta^{(j)}\ddot{y}\\ \dot{\bar{q}}^{(j)}-\bar{\lambda}^{(j)}\bar{q}^{(j)}&=-\frac{1}{2}\bar{\beta}^{(j)}\ddot{y}\end{aligned}\right\}j=1,2\cdots n$$

另外，设$q^{(j)}=\frac{1}{2}\beta^{(j)}q_0^{(j)}$，$\bar{q}^{(j)}=\frac{1}{2}\bar{\beta}^{(j)}\bar{q}_0^{(j)}$，则关于振型基本解$q_0^{(j)}$，$\bar{q}_0^{(j)}$的方程式可表示成

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_0^{(j)}-\lambda^{(j)}q_0^{(j)}&=-\ddot{y}\\ \dot{\bar{q}}_0^{(j)}-\bar{\lambda}^{(j)}\bar{q}_0^{(j)}&=-\ddot{y}\end{aligned}\right\}j=1,2\cdots n \tag{7.48}$$

e.解耦方程式的解

设系统从初始位移为0的静止状态开始运动，对式（7.48）作拉普拉斯变换。如$q_0^{(j)}$和$\ddot{y}$的拉普拉斯变换为$q_0^{(j)}\sqsupset Q_0(p)$，，$\ddot{y}\sqsupset\ddot{Y}(p)$，则由式（3.61）有$\dot{q}_0^{(j)}\sqsupset pQ_0(p)$。所以，式（7.48）的第1个式子变成$pQ_0(p)-\lambda^{(j)}Q_0(p)=-\ddot{Y}(p)$，可以写成

$$Q_0(p)=-\frac{\ddot{Y}(p)}{p-\lambda^{(j)}} \tag{h}$$

由式（3.48），$e^{\lambda^{(j)}t}\sqsupset 1/(p-\lambda^{(j)})$。所以，对式(h)作拉普拉斯变换，并根据式（3.67）便可得出解为

$$q_0^{(j)}=-\int_0^t e^{\lambda^{(j)}(t-\tau)}\ddot{y}(\tau)d\tau \tag{7.49}$$

同样，由式（7.48）的第2式可得

$$\bar{q}_0^{(j)}=-\int_0^t e^{\bar{\lambda}^{(j)}(t-\tau)}\ddot{y}(\tau)d\tau \tag{i}$$

比较式（7.49）和式(i)可知，因为$\ddot{y}(\tau)$是实函数，所以$q_0^{(j)}$和$\bar{q}_0^{(j)}$有共轭关系。

式（7.45）可表示成

$$\begin{aligned}X_i&=\sum_{j=1}^{n}(v_i^{(j)}q^{(j)}+\bar{v}_i^{(j)}\bar{q}^{(j)})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\beta^{(j)}v_i^{(j)}q_0^{(j)}+\bar{\beta}^{(j)}\bar{v}_i^{(j)}\bar{q}_0^{(j)})\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\beta^{(j)}v_i^{(j)}q_0^{(j)}+\overline{\beta^{(j)}v_i^{(j)}q_0^{(j)}})\\&=\sum_{j=1}^{n}\mathscr{R}[\beta^{(j)}v_i^{(j)}q_0^{(j)}]\qquad i=1,2\cdots 2n\end{aligned}$$

对于复固有值问题，将这种互为共轭关系的两项之和称为振型（振型阶数为$j=1,2\cdots n$）还是比较合适的。上面式子中的$\beta^{(j)}v_i^{(j)}$就是各振型的复参与系数。注意到矢量$\{X\}$的组成如式（7.44）所示，各质点的速度和位移就可由下式给出

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{x}\}&=-\sum_{j=1}^{n}\mathscr{R}\left[\{\beta^{(j)}v_i^{(j)}\}\int_0^t e^{\lambda^{(j)}(t-\tau)}\ddot{y}(\tau)d\tau\right]\\ \{x\}&=-\sum_{j=1}^{n}\mathscr{R}\left[\{\beta^{(j)}v_{i+n}^{(j)}\}\int_0^t e^{\lambda^{(j)}(t-\tau)}\ddot{y}(\tau)d\tau\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.50}$$

式中v_i和v_{i+n}分别表示$[V]$的上半部分元素和下半部分元素。同时，由式(d)，各质点的绝

对加速度可表示成

$$\{\ddot{x}\}+\ddot{y}\{1\}=-[M]^{-1}([C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}) \tag{7.51}$$

另外，由式（7.41）第1个式子有$[\mu]^{-1}[V]^T[B][V]=[I]$，所以有如下关系，$[\mu]^{-1}[V]^T[B]=[V]^{-1}$。因此，将$\frac{1}{2}[V]$前乘式（7.46）后，就可知道复参与系数$\{\beta\}$具有性质：$\frac{1}{2}[V]\{\beta\}=\{E\}$，即

$$\mathscr{R}([V]\{\beta\})=\{E\} \tag{7.52}$$

这个性质与实固有值问题中的定理13是相对应的。

式（7.50）中的积分是函数$f_1(t)=e^{\lambda^{(j)}t}(\mathscr{R}[\lambda^{(j)}]<0)$和$f^2(t)=\ddot{y}(t)$在时域中的褶积，对其作富里哀变换后，可以如式（3.129）所示用频域内的两个函数的富里哀变换之积来表示。所以，在实际计算时，先计算时间函数$f_1(t)$，然后用快速富里哀变换法对$f_1(t)$和$f_2(t)$作富里哀变换并求出其乘积，再对它作富里哀逆变换求出式（7.50）的积分值，即式(7.49)所示的振型基本解。这样做计算速度是很快的。

7.3.3 振型的特性

式（7.26）所示的有阻尼多质点系运动方程式为

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P\} \tag{a}$$

如6.4节所述，它的解属于实对称矩阵的固有值问题，所以求得的振型矩阵$[U]$也是实矩阵。作变量变换

$$\{\delta\}=[v]\{q\} \tag{b}$$

如由全等变换$[U]^T[C][U]$使阻尼矩阵$[C]$对角化，则如式（6.89）那样式（a）可以精确分解成各个振型的独立方程式

$$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=P^{(j)}/M^{(j)} \tag{c}$$

求出式（c）的解后，系统的任意振型就可由式（b）确定如下。

$$\{\delta^{(j)}\}=\{u^{(j)}\}q^{(j)} \tag{d}$$

式（d）中表示各阶振型的矢量$\{u^{(j)}\}$是实矢量，所以，任何质点之间都没有振动相位差。即如图4.2节所示的例子那样，对各阶振型的振动，所有质点均同时达到最大位移点，同时通过中心轴。7.2已说过，呈现这种运动方式时，称系统具有经典的正则振型。

与此相反，当由$[U]^T[C][U]$得到的对角矩阵不满足正交条件时，用实矩阵$[U]$作式（b）的变换后，就不可能将运动方程式（a）分解成如式（c）那样各阶振型互相独立的解耦方程式。

但如前节中所述，即使在这种情况下，也可以通过解式（7.35）所示的非对称实矩阵的固有值问题求出固有矢量$\{v\}$，再如式（7.45）那样作变量变换

$$\{X\}=[V]\{q\} \tag{e}$$

从而精确地分解成关于$q^{(j)}$独立的运动方程式。

这时表示各阶振型的振型矢量$\{v^{(j)}\}$不同于式(d)中的$\{u^{(j)}\}$，而是复矢量。所以，即使是同一振型，各质点位移之间也有相位差。也就是说，如设矢量$\{v^{(j)}\}$中与质点r和质点s对应的位移分量为$v_r^{(j)}$，$v_s^{(j)}$，把它们画在图7.8的阿甘特图上，则可以看出：两个复数的幅角差$\phi=\theta_r-\theta_s$就是两质点间的相位差，这两个质点的振动不仅振幅不同，相位也不同。这时若把

两个质点的运动，象简单的两质点系情况那样画出如图7.9那样的图形，就不再是所有 质 点同时达到最大位移点和同时通过中心轴位置了。这与图4.2的情况有本质的差别，应理 解 为系统不具有经典的正则振型。

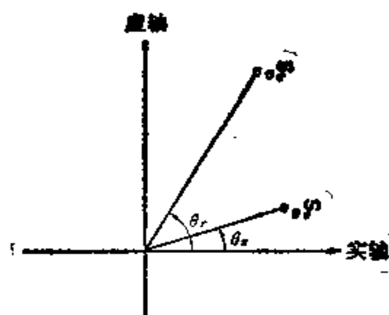


图7.8　两质点间的相位差

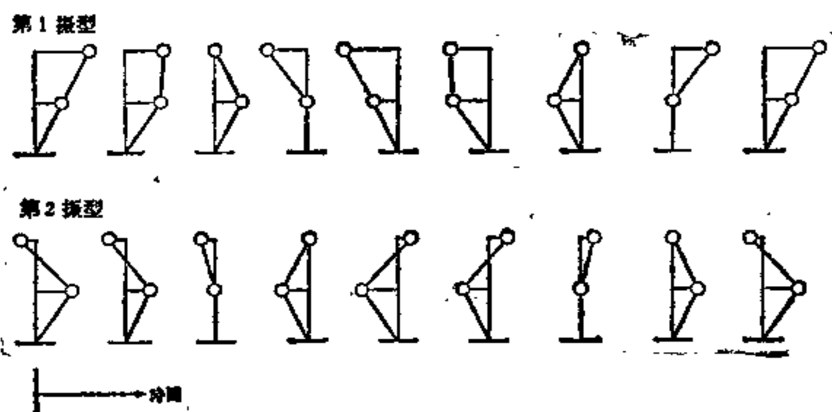


图7.9　有阻尼系统的振型

第八章　数值计算和实验分析

8.1　计 算 程 序

下面列举一些计算机用的程序，其中有些是分析本书中所处理的实际问题时进行数值计算所必须用到的，另一些能使计算更为方便。

矩阵计算

矩阵乘积	*PROM*
全等变换	*CONG*
（逆矩阵）	*MINV*
多质点系振型特性	*MOCH*
（实固有值问题）	*EIGR*
（复固有值问题）	*EIGC*

时程分析

地面运动加速度积分	*ITAC*
单质点系统反应	*SDOF*
反应谱	*REST*
多质点系统的反应	*MDOF*

频率分析

快速富里哀变换	*FAST*
频率响应函数	*FRES*
（富里哀谱）	*SPAC*

本章介绍这些数值计算的算法，并分别列出其程序表。考虑到输入、输出形式因计算机类型而异，特别是作图方法随机器类型不同而有很大的差别，这里尽量列举与这些方面及计算机容量无关的一般性子程序。上面的英文是各子程序的调用名，程序是用FORTRAN（版本：7000）写的，旨在易懂，几乎没有进行节省机时的优化处理。

上面带括弧的程序，即逆矩阵、实固有值的问题、复固有值问题的算法在本书中没有讲述。有关内容读者可以从不同计算机各自备有的子程序库里找到，这里就省略了。关于计算富里哀谱的程序，必要时可以参考作者的另一著作[17]刊载的通用程序，它同时还可以计算功率谱及自相关函数，这里也省略不讲了。解复特征值问题的程序*EIGC*在运用7.3.2节的福斯解法时要用到，但这个解法只在理论上有意义，实际上几乎不用，故本书没有介绍*EIGC*的用例。

在以下程序中，变量类型 I ，R ，C的含义是

I ：单精度整数

17) 大崎顺彦，地震动のスペクトル解析入门，鹿岛出版会，1976年7月．中译本：吕敏中，谢礼立译，地震动谱分析入门，地震出版社，1980年。

R：单精度实数

C：单精度复数

本章给出的例题中，多数要给定地面运动加速度时程，时程可以通过数据文件输入，数据文件的内容按下列顺序排列：

第1行：地震动名称（A48）

第2行：最大加速度（F12.0）单位：cm/s²

第3行：数据的时间间隔（F7.0）单位：s

第4行：数据总数（I5）

第5行：数据格式（A20）

第6行以后为加速度时程数据，单位：cm/s²。

8.2 矩阵算法

8.2.1 矩阵的积

本程序*PROM*（Product of Matrices）用于计算任意方阵〔*A*〕与相匹配的任意矩阵〔*B*〕的乘积〔*C*〕。

即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N_B} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N_B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N_A1} & c_{N_A2} & \cdots & c_{N_AN_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N_A} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N_A} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N_A1} & a_{N_A2} & \cdots & a_{N_AN_A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N_B} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N_B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N_A1} & b_{N_A2} & \cdots & b_{N_AN_B} \end{pmatrix}$$

前乘矩阵〔*A*〕只限于方阵，因为本书实用算例中都是方阵。计算方法如式（5.9），即

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N_A} a_{ik} b_{kj}$$

注意在调用它的主程序中，数组说明语句DIMENSION中要说明〔*A*〕的列（行）数要与〔*B*〕及〔*C*〕的行数相等，且〔*B*〕与〔*C*〕的大小相同，否则无法使用，即在程序中定义数组时要使〔*A*〕、〔*B*〕与〔*C*〕匹配。

当后乘矩阵〔*B*〕——因而积〔*C*〕——都是矢量，在程序中定义为一维数组情况下，调用时只要令$NB=ND2=1$。用例见例题8.2。

PROM（矩阵乘积）

目的

计算给定的方阵〔*A*〕和相匹配的矩阵〔*B*〕之积〔*C*〕=〔*A*〕〔*B*〕。

使用方法

（1）连接方法

CALL PRON (A, B, C, NA, NB, N1D, N2D)

变　　量	类　　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
A	R 二维数组(ND_1, ND_1)	前乘方阵〔A〕	不　　变
B	R 二维数组(ND_1, ND_2)	后乘矩阵〔B〕	不　　变
C	R 二维数组(ND_1, ND_2)	不必赋值	积〔C〕
NA	I	〔A〕、〔B〕、〔C〕的行数	不　　变
NB	I	〔B〕、〔C〕的列数	不　　变
ND_1	I	主程序中方阵〔A〕的维数及〔B〕、〔C〕行方向的维数	不　　变
ND_2	I	主程序中〔B〕、〔C〕列方向的维数	不　　变

(2) 必要的子程序及函数子程序

无

程序表

```
C    * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *                      PROM  1
C      SUBROUTINE FOR PRODUCT OF MATRICES                              PROM  2
C    * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *                      PROM  3
C                                                                      PROM  4
C                          CODED BY Y.OHSAKI                           PROM  5
C                                                                      PROM  6
C      PURPOSE                                                         PROM  7
C        TO COMPUTE PRODUCT C=A*B WHERE A AND B ARE SQUARE MATRIX AND  PROM  8
C        ANY CONFORMABLE MATRIX, RESPECTIVELY                          PROM  9
C                                                                      PROM 10
C      USAGE                                                           PROM 11
C        CALL PROM(A,B,C,NA,NB,ND1,ND2)                                PROM 12
C                                                                      PROM 13
C      DESCRIPTION OF PARAMETERS                                       PROM 14
C        A(ND1,ND1) - PREMULTIPLYING SQUARE MATRIX                     PROM 15
C        B(ND1,ND2) - POSTMULTIPLYING MATRIX                           PROM 16
C        C(ND1,ND2) - PRODUCT                                          PROM 17
C        NA         - TOTAL NUMBER OF ROWS IN MATRICES A,B,C           PROM 18
C        NB         - TOTAL NUMBER OF COLUMNS IN MATRICES B,C          PROM 19
C        ND1        - DIMENSION OF SQUARE MATRIX A AND ROW-WISE        PROM 20
C                     DIMENSION OF B,C IN CALLING PROGRAM              PROM 21
C        ND2        - COLUMN-WISE DIMENSION OF B,C IN CALLING PROGRAM  PROM 22
C                                                                      PROM 23
C      SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                   PROM 24
C        NONE                                                          PROM 25
C                                                                      PROM 26
       SUBROUTINE PROM(A,B,C,NA,NB,ND1,ND2)                            PROM 27
C                                                                      PROM 28
       DIMENSION A(ND1,ND1),B(ND1,ND2),C(ND1,ND2)                      PROM 29
C                                                                      PROM 30
       DO 130 I=1,NA                                                   PROM 31
       DO 120 J=1,NB                                                   PROM 32
       S=0.0                                                           PROM 33
       DO 110 K=1,NA                                                   PROM 34
       S=S+A(I,K)*B(K,J)                                               PROM 35
  110  CONTINUE                                                        PROM 36
       C(I,J)=S                                                        PROM 37
  120  CONTINUE                                                        PROM 38
  130  CONTINUE                                                        PROM 39
       RETURN                                                          PROM 40
       END                                                             PROM 41
```

【例题8.1】 编出式 (5.12) 所示矩阵积的主程序。

〔解〕 程序如下，计算结果存在数组C中：

```
      DIMENSION A(3,3),B(3,3),C(3,3)                              1
      DATA      A/3.,4.,9.,4.,2.,8.,9.,6.,6./,                    2
     1          B/1.,2.,1.,2.,3.,1.,1.,3.,2./                     3
C                                                                 4
      CALL PROM(A,B,C,3,3,3,3)                                    5
      STOP                                                        6
      END                                                         7
```

【例题8.2】 编出式（6.13）所示矩阵和矢量乘积的主程序。

〔解〕 程序如下，结果存在一维数组 C 中：

```
      DIMENSION A(3,3),B(3),C(3)                                  1
      DATA      A/3.,1.,-2.,2.,1.,-3.,-3.,2.,1./,B/3.,-2.,1./     2
C                                                                 3
      CALL PROM(A,B,C,3,1,3,1)                                    4
      STOP                                                        5
      END                                                         6
```

8.2.2 全等变换

本程序CONG（Congruence Transform）用于计算以任意方阵$[B]$对任意对称矩阵$[A]$的全等变换$[C]=[B]^T[A][B]$。方法为矩阵的转置与相乘。如式（5.27）所示，利用$[C]$的对称性实际上只计算$[C]$的上三角部分。

CONG（全等变换）

目的

计算以（正方）变换矩阵$[B]$对某对称矩阵$[A]$的全等变换$[C]=[B]^T[A][B]$。

使用方法

（1）连接方法

CALL CONG(N, A, B, C, ND)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
N	I	方阵$[A]$、$[B]$、$[C]$的维数	不　变
A	R 二维数组(ND,ND)	给定的对称矩阵$[A]$	不　变
B	R 二维数组(ND,ND)	变换矩阵$[B]$	不　变
C	R 二维数组(ND,ND)	不必赋值	全等变换矩阵$[C]$
ND	I	主程序中$[A]$、$[B]$、$[C]$的维数	不　变

（2）必要的子程序及函数子程序

无

程序表

```
C ************************                               CONG  1
C     SUBROUTINE FOR CONGRUENCE TRANSFORM                  CONG  2
C ************************                               CONG  3
C                                                        CONG  4
C                      CODED BY Y.OHSAKI                 CONG  5
C                                                        CONG  6
C     PURPOSE                                            CONG  7
C       TO COMPUTE CONGRUENCE TRANSFORM C=B'*A*B OF SYMMETRIC MATRIX A, CONG  8
C       WHERE B' IS TRANSPOSE OF SQUARE MATRIX B         CONG  9
C                                                        CONG 10
C     USAGE                                              CONG 11
C       CALL CONG(N,A,B,C,ND)                            CONG 12
C                                                        CONG 13
C     DESCRIPSION OF PARAMETERS                          CONG 14
C       N           - TOTAL NUMBER OF ROWS OR COLUMNS IN MATRICES A,B,C  CONG 15
C       A(ND,ND) - ORIGINAL MATRIX                       CONG 16
C       B(ND,ND) - TRANSFORM MATRIX                      CONG 17
C       C(ND,ND) - RESULTANT MATRIX                      CONG 18
C       ND          - DIMENSION OF A,B,C IN CALLING PROGRAM  CONG 19
C                                                        CONG 20
C     SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED      CONG 21
C       NONE                                             CONG 22
C                                                        CONG 23
      SUBROUTINE CONG(N,A,B,C,ND)                        CONG 24
C                                                        CONG 25
      DIMENSION A(ND,ND),B(ND,ND),C(ND,ND)               CONG 26
C                                                        CONG 27
      DO 140 I=1,N                                       CONG 28
      DO 130 J=I,N                                       CONG 29
      SS=0.0                                             CONG 30
      DO 120 K=1,N                                       CONG 31
      S=0.0                                              CONG 32
      DO 110 L=1,N                                       CONG 33
      S=S+B(L,I)*A(L,K)                                  CONG 34
  110 CONTINUE                                           CONG 35
      SS=SS+S*B(K,J)                                     CONG 36
  120 CONTINUE                                           CONG 37
      C(I,J)=SS                                          CONG 38
      C(J,I)=SS                                          CONG 39
  130 CONTINUE                                           CONG 40
  140 CONTINUE                                           CONG 41
      RETURN                                             CONG 42
      END                                                CONG 43
```

【例题8.3】 编出求5阶对称矩阵$[A]$与5阶方阵$[U]$的全等变换$[U]^T[A][U]$的主程序。

〔解〕 程序如下，结果放在数组C中。为使程序使用到60阶矩阵，数组开到足够大。

```
      DIMENSION A(60,60),U(60,60),,C(60,60)                          1
      DATA      N/5/                                                  2
C                                                                     3
      READ(5,501)((A(I,J),J=1,N),I=1,N),((U(I,J),J=1,N),I=1,N)      4
      CALL CONG(N,A, U,C,60)                                          5
      STOP                                                            6
C                                                                     7
  501 FORMAT(5F10.0)                                                  8
      END                                                             9
```

8.2.3 多质点系的振型特性

给定多质点系质量矩阵$[M]$及刚度矩阵$[K]$（均为正定实对称矩阵），可由固有值方程

$$[K]\{u\}=\lambda[M]\{u\}$$

求固有值λ及固有矢量$\{u\}$。λ是正实数，$\{u\}$是实数矢量。多质点系自由度为n时，固有值按大小排列如下：

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \cdots < \lambda^{(n)}$$

上面标有对应的振型阶次。在振型矩阵中，把一阶到n阶固有值所对应的固有矢量排列在第1到第n列上。

$$[U]=\begin{bmatrix} u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_2^{(n)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \end{bmatrix} \tag{a}$$

各阶振型的固有圆频率$\omega^{(j)}$、固有频率$\nu^{(j)}$、固有周期$T^{(j)}$ （$j=1,2\cdots n$）分别为

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(j)} &= \sqrt{\lambda^{(j)}} && \text{rad/s} \\ \nu^{(j)} &= \omega^{(j)}/2\pi && \text{Hz} \\ T^{(j)} &= 1/\nu^{(j)} && \text{s} \end{aligned}\right\}$$

各阶振型参与系数$\beta^{(j)}$由矢量

$$\{\beta\}=([U]^T[M][U])^{-1}[U]^T[M]\{1\}$$

的第1列第n个分量给出。

固有矢量的模未确定，因而各分量的值不确定，将式(a)矩阵的第1列到第n列分别与对应的各阶参与系数相乘，振型矩阵形如

$$[U]=\begin{bmatrix} \beta^{(1)}u_n^{(1)} & \beta^{(2)}u_n^{(2)} & \cdots & \beta^{(n)}u_n^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta^{(1)}u_2^{(1)} & \beta^{(2)}u_2^{(2)} & \cdots & \beta^{(n)}u_2^{(n)} \\ \beta^{(1)}u_1^{(1)} & \beta^{(2)}u_1^{(2)} & \cdots & \beta^{(n)}u_1^{(n)} \end{bmatrix} \tag{b}$$

各列为参与函数矢量，这样表示较方便。

下面的程序*MOCH* (Model Characteristics of Multi-Degree-of-Freedom System) 计算给定质量与刚度矩阵的无阻尼多质点系统的振动特性，即各阶固有圆频率及振型矩阵。求出的振型矩阵形如式(b)。程序中调用的子程序*EIGR*(Eigen Values-Real) 具有*EIGR*(*N*, *A*, *B*, *EIG*, *U*, *ND*) 形式，是解$[A]\{u\}=\lambda[B]\{u\}$形固有值问题的库子程序。送入两个N次的实对称矩阵*A*(*ND*,*ND*)及*B*(*ND*,*ND*)并调用后，固有值存入数组*EIG*(*ND*)中，对应的固有矢量存入形如式(a)的数组*U*(*ND*,*ND*)中返回主程序。

要注意，有的库子程序固有值排列顺序不定。考虑到这种情况，下面的程序中对固有圆频率和振型矩阵的各列作了交换，使固有圆频率按数值由小到大排列，固有矢量也与之对应排列。由于程序*EIGR*返回时，固有矢量的模对结果没有影响。解固有值问题的子程序中，调用时送入矩阵$[A]$、$[B]$在返回时常被破坏，因此本程序在调用*EIGR*之前将质量矩阵$[M]$与刚度矩阵$[K]$预先存放在另外的工作区域。

另外参与系数$\{\beta\}$的数值因固有矢量的模而异，但它的绝对值大小没有意义，故本程序表面上计算它，但并不作为虚变量返回主程序。

MOCH （多质点系统振振特性）

目的

计算给定质量及刚度矩阵的无阻尼多质点系统的固有圆频率及振型矩阵。

使用方法

（1）连接方法

CALL MOCH(N, EN, EK, W, U, A, B, ND)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
N	I	自由度数目	不　变
EM	R 二维数数(ND,ND)	质量矩阵	不　变
EK	R 二维数组(ND,ND)	刚度矩阵	不　变
W	R 一维数组(ND)	不必赋值	固有圆频率(单位：rad/s)
U	R 二维数组(*ND*, *ND*)	不必赋值	振型矩阵
A	R 二维数组(*ND*, *ND*)	不必赋值	（工作区域）
B	R 二维数组(ND,ND)	不必赋值	（工作区域）
ND	I	主程序中*EM*, *EK*, *EM*, *W*, *U*, *A*, *B*的维数	不　变

（2）注意事项

振型矩阵[U]各列是用第1到第n阶参与函数矢量表示的。

（3）必要的子程序及函数子程序

EIGR

程序表

```
C     ***************************                                      MOCH   1
C       SUBROUTINE FOR MODAL CHARACTERISTICS                           MOCH   2
C     ***************************                                      MOCH   3
C                                                                      MOCH   4
C                          CODED BY Y.OHSAKI                           MOCH   5
C                                                                      MOCH   6
C                                                                      MOCH   7
C       PURPOSE                                                        MOCH   8
C         TO COMPUTE MODAL CHARACTERISTICS, I.E., MODAL CIRCULAR       MOCH   9
C         FREQUENCIES AND MODAL MATRIX, OF UNDAMPED MULTI-DEGREE-OF-   MOCH  10
C         FREEDOM SYSTEM WITH GIVEN MASS AND STIFFNESS MATRICES        MOCH  11
C                                                                      MOCH  12
C       USAGE                                                          MOCH  13
C         CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,ND)                                MOCH  14
C                                                                      MOCH  15
C       DESCRIPTION OF PARAMETERS                                      MOCH  16
C         N            - NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM                  MOCH  17
C         EM(ND,ND)    - MASS MATRIX                                   MOCH  18
C         EK(ND,ND)    - STIFFNESS MATRIX                              MOCH  19
C         W(ND)        - MODAL CIRCULAR FREQUENCIES IN RAD/SEC         MOCH  20
C         U(ND,ND)     - MODAL MATRIX                                  MOCH  21
C         A(ND,ND)     - WORKING AREA                                  MOCH  22
C         B(ND,ND)     - WORKING AREA                                  MOCH  23
C         ND           - DIMENSION OF EM,EK,W,U,A,B IN CALLING PROGRAM MOCH  24
C                                                                      MOCH  25
C       REMARKS                                                        MOCH  26
C         MODAL MATRIX U IS SO EXPRESSED THAT EACH COLUMN REPRESENTS   MOCH  27
C         PARTICIPATION VECTOR FOR EACH MODE                           MOCH  28
C                                                                      MOCH  29
C       SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                  MOCH  30
C         EIGR                                                         MOCH  31
C                                                                      MOCH  32
      SUBROUTINE MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,ND)                              MOCH  33
C                                                                      MOCH  34
      DIMENSION EM(ND,ND),EK(ND,ND),W(ND),U(ND,ND),A(ND,ND),B(ND,ND)   MOCH  34
```

```
C
      DO 12Ø I=1,N                                          MOCH 35
      DO 11Ø J=1,N                                          MOCH 36
      A(I,J)=EK(I,J)                                        MOCH 37
      B(I,J)=EM(I,J)                                        MOCH 38
  11Ø CONTINUE                                              MOCH 39
  12Ø CONTINUE                                              MOCH 4Ø
      CALL EIGR(N,A,B,W,U,ND)                               MOCH 41
      DO 14Ø J=1,N                                          MOCH 42
      W(J)=SQRT(W(J))                                       MOCH 43
      A(1,J)=FLOAT(J)+Ø.1                                   MOCH 44
      DO 13Ø I=1,N                                          MOCH 45
      B(I,J)=U(I,J)                                         MOCH 46
  13Ø CONTINUE                                              MOCH 47
  14Ø CONTINUE                                              MOCH 48
      N1=N-1                                                MOCH 49
      DO 16Ø K=1,N1                                         MOCH 5Ø
      NK=N-K                                                MOCH 51
      DO 15Ø J=1,NK                                         MOCH 52
      IF(W(J).LT.W(J+1)) GO TO 15Ø                          MOCH 53
      TEMP=W(J)                                             MOCH 54
      W(J)=W(J+1)                                           MOCH 55
      W(J+1)=TEMP                                           MOCH 56
      TEMP=A(1,J)                                           MOCH 57
      A(1,J)=A(1,J+1)                                       MOCH 58
      A(1,J+1)=TEMP                                         MOCH 59
  15Ø CONTINUE                                              MOCH 6Ø
  16Ø CONTINUE                                              MOCH 61
      DO 18Ø J=1,N                                          MOCH 62
      J1=IFIX(A(1,J))                                       MOCH 63
      DO 17Ø I=1,N                                          MOCH 64
      U(I,J)=B(I,J1)                                        MOCH 65
  17Ø CONTINUE                                              MOCH 66
  18Ø CONTINUE                                              MOCH 67
      DO 22Ø J=1,N                                          MOCH 68
      UTMU=Ø.Ø                                              MOCH 69
      UTM1=Ø.Ø                                              MOCH 7Ø
      DO 2ØØ K=1,N                                          MOCH 71
      UTM=Ø.Ø                                               MOCH 72
      DO 19Ø L=1,N                                          MOCH 73
      UTM=UTM+U(L,J)*EM(L,K)                                MOCH 74
  19Ø CONTINUE                                              MOCH 75
      UTMU=UTMU+UTM*U(K,J)                                  MOCH 76
      UTM1=UTM1+UTM                                         MOCH 77
  2ØØ CONTINUE                                              MOCH 78
      BETA=UTM1/UTMU                                        MOCH 79
      DO 21Ø I=1,N                                          MOCH 8Ø
      U(I,J)=BETA*U(I,J)                                    MOCH 81
  21Ø CONTINUE                                              MOCH 82
  22Ø CONTINUE                                              MOCH 83
      RETURN                                                MOCH 84
      END                                                   MOCH 85
                                                            MOCH 86
```

【例题8.4】 编出求例题4.1中两质点系统的固有圆频率及参与函数的主程序。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION EM(2,2),EK(2,2),W(2),U(2,2),A(2,2),B(2,2)              1
      DATA      EM/Ø.Ø55,Ø.ØØØ,Ø.ØØØ,Ø.Ø5Ø/,EK/12Ø.,-12Ø.,-12Ø.,24Ø./  2
C                                                                      3
      CALL MOCH(2,EM,EK,W,U,A,B,2)                                     4
      STOP                                                             5
      END                                                              6
```

如式（4.9）所示的固有圆频率的计算结果存入数组W中，式（6.62）所示的参与函数的计算结果存入数组U中。

【例题8.5】 给出剪切型五质点系的质量矩阵及刚度矩阵，数据（由数据文件）按行输入，编出求固有圆频率、参与函数、正则质量及正则弹簧常数的主程序。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION EM(6Ø,6Ø),EK(6Ø,6Ø),W(6Ø),U(6Ø,6Ø),A(6Ø,6Ø),B(6Ø,6Ø),     1
     1          EMJ(6Ø,6Ø),EKJ(6Ø,6Ø)                                       2
      DATA      N/5/                                                        3
C                                                                           4
      READ(5,5Ø1) ((EM(I,J),J=1,N),I=1,N),((EK(I,J),J=1,N),I=1,N)          5
      CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,6Ø)                                         6
      CALL CONG(N,EM,U,EMJ,6Ø)                                              7
      CALL CONG(N,EK,U,EKJ,6Ø)                                              8
      STOP                                                                  9
C                                                                          1Ø
  5Ø1 FORMAT(5F1Ø.Ø)                                                       11
      END                                                                  12
```

计算得到的固有圆频率存入数组W，参与函数存入数组U，正则质量及正则弹簧常数分别存入数组EMJ及EKJ的主对角线上。假定输入值如式（6.52）及（6.53）所示，可得到表6.1所示的固有圆频率及图6.13所示的参与函数。只是正则质量及正则弹簧常数是由式(6.67)的固有矢量计算的，与式（6.55）的固有矢量模不同，注意其值与用式（6.79）算得的不同。这里$M^{(j)}$及$K^{(j)}$的值如下，$K^{(j)}/M^{(j)}$的值未变。

阶数j	$M(j)$	$K(j)$	$K(j)/M(j)$
1	0.201171	63.1333	313.8
2	0.027255	61.3490	2251
3	0.007926	44.8722	5661
4	0.002609	25.5331	9786
5	0.001037	15.1149	14576

【例题8.6】 编出求解例题6.14的主程序。假定所有振型的阻尼比均为5%，编写出对系统地面运动加速度反应的主程序。

〔解〕 将质量矩阵、刚度矩阵的元素按$[M]$，$[J/H^2]$，$[K^{xx}]$，$[K^{x\theta}/H]$，$[K^{\theta x}/H]$，$[K^{\theta\theta}/H^2]$顺序输入，程序如下。程序中调用的子程序$MINV$ (Matrix Inversion) 是求逆矩阵的子程序。其形式为$MINV$ (N，A，ND)，其中$A(ND,ND)$是$N\times N$次矩阵的二维数组，计算后其逆矩阵仍放回在$[A]$中。

```
      DIMENSION EM(1Ø,1Ø),EK(1Ø,1Ø),T(1Ø),U(1Ø,1Ø),A(1Ø,1Ø),B(1Ø,1Ø),     1
     1          EMRR(5,5),EKRS(5,5),EKSR(5,5),EKSS(5,5),EK1(5,5),           2
     2          T1(5),U1(5,5),A1(5,5),B1(5,5)                               3
      DATA      EM/1ØØ*Ø.Ø/                                                 4
C                                                                           5
      READ(5,5Ø1) ((EMRR(I,J),J=1,5),I=1,5),((EM(I,J),J=6,1Ø),I=6,1Ø),     6
     1            ((EK(I,J),J=1,5),I=1,5),((EKRS(I,J),J=1,5),I=1,5),       7
     2            ((EKSR(I,J),J=1,5),I=1,5),((EKSS(I,J),J=1,5),I=1,5)      8
C                                                                           9
C     MODAL CHARACTERISTICS                                                1Ø
C                                                                          11
      DO 12Ø I=1,5                                                         12
      DO 11Ø J=1,5                                                         13
      EM(I,J)=EMRR(I,J)                                                    14
      EK(I,J+5)=EKRS(I,J)                                                  15
      EK(I+5,J)=EKSR(I,J)                                                  16
      EK(I+5,J+5)=EKSS(I,J)                                                17
  11Ø CONTINUE                                                             18
  12Ø CONTINUE                                                             19
      CALL MOCH(1Ø,EM,EK,T,U,A,B,1Ø)                                       2Ø
      DO 13Ø J=1,1Ø                                                        21
      T(J)=6.283185/T(J)                                                   22
  13Ø CONTINUE                                                             23
C                                                                          24
C     STATIC CONDENSATION                                                  25
C                                                                          26
      CALL MINV(5,EKSS,5)                                                  27
      CALL CONG(5,EKSS,EKRS,EK1,5)                                         28
      DO 15Ø I=1,5                                                         29
      DO 14Ø J=1,5                                                         3Ø
      EK1(I,J)=EK(I,J)-EK1(I,J)                                            31
                                                                           32
```

```
  140 CONTINUE                                                    33
  150 CONTINUE                                                    34
      CALL MOCH(5,EMRR,EK1,T1,U1,A1,B1,5)                         35
      DO 160 J=1,5                                                36
      T1(J)=6.283185/T1(J)                                        37
  160 CONTINUE                                                    38
      STOP                                                        39
C                                                                 40
  501 FORMAT(5F10.0)                                              41
      END
```

计算得到的一至十阶固有周期和参与函数分别放在数组T及V中。减缩刚度矩阵放在数组$EK1$中，静减缩的一至五阶固有周期及振型分别放在数组$T1$及$U1$中。

只需在后面例题8.14的主程序中对DATA及READ语句作如下变动即可用来计算反应。

```
  DATA       N/10/,DAMP/0.05/,IV/5*1,55*0/,D/3600*0.0/,EM/3600*0.0/     4
  READ(5,502) ((EM(I,J),J=1,5),I=1,5),((EK(I,J),J=6,10),I=6,10),        8
 1            ((EK(I,J),J=1,5),I=1,5),((EK(I,J),J=6,10),I=1,5),        81
 2            ((EK(I,J),J=1,5),I=6,10),((EK(I,J),J=6,10),I=6,10)        82
```

8.3 时程分析

8.3.1 地面运动加速度的积分

地面加速度通常是按一定时间间隔Δt给出的离散值，因面当地面运动加速度为$\ddot{y}(t)$时，对时刻t的值$\ddot{y}_t$与下一时刻$t+\Delta t$时的值$\ddot{y}_{t+\Delta t}$之间加速度如何变化一无所知，对此有必要作一些假定。一般常用两种假定，一种如图8.1(a)所示，假定两点间加速度值按直线变化，称为线性加速度法。另一种如图(b)所示，取两点加速度的平均值$(\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t})/2$为$t$时刻的值，称为梯形加速度法。

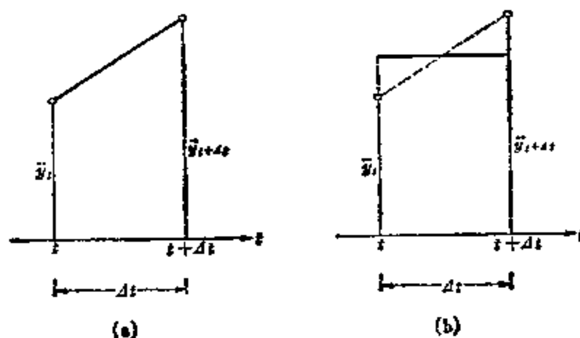


图8.1 加速度变化的假定

由加速度数值积分求速度和位移时，因采用上述假定不同面结果会有所差异。考虑到解的稳定性[18]，这里采用梯形加速度法。

将时间函数$f(t)$作泰勒（Tailor）级数展开时，设k阶微分系数为$f^{(k)}(t)$，则

$$f(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^k}{k!}f^{(k)}(t)$$

将$\dot{y}_{t+\Delta t}$及$y_{t+\Delta t}$按泰勒级数展开

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{t+\Delta t}&=\dot{y}_t+(\Delta t)\ddot{y}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\dddot{y}_t+\cdots\\ y_{t+\Delta t}&=y_t+(\Delta t)\dot{y}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\ddot{y}_t+\frac{1}{6}(\Delta t)^3\dddot{y}_t+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8.1}$$

按梯形加速度法假定，时刻t与$t+\Delta t$间加速度一定，即

$$\ddot{y}_t=\frac{\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t}}{2},\quad \dddot{y}_t=0$$

18) 武藤清：構造物の動的设计，耐震设计シリーズ応用编，丸善，昭和52年1月，P.76。

则4阶以上的微分系数为0，代入式（8.1）中得

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{t+\Delta t}&=\dot{y}_t+(\Delta t)\frac{\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t}}{2}\\ y_{t+\Delta t}&=y_t+(\Delta t)\dot{y}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t}}{2}\end{aligned}\right\}\tag{8.2}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{t+\Delta t}&=E_t+(\Delta t/2)\ddot{y}_{t+\Delta t}\\ y_{t+\Delta t}&=F_t+(\Delta t/2)^2\ddot{y}_{t+\Delta t}\end{aligned}\right\}\tag{8.3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}E_t&=\dot{y}_t+(\Delta t/2)\ddot{y}_t\\ F_t&=y_t+(\Delta t/2)(\dot{y}_t+E_t)\end{aligned}\right\}$$

E_t及F_t是由时刻t决定的量，由$E_t=F_t=0$开始，经式（8.3）可逐步求得各时刻的地面速度与位移。

下面的程序*ITAC*（Intergration of Seismic Acceleration）按上述方法由地面加速度积分求速度和位移，同时选出最大值。

另外利用式（3.128）的富里哀变换关系可在频域对时程积分[17]，这里就不作介绍了。

ITAC（地面加速度积分）

目的

由地面运动加速度积分求地面运动速度及位移。

使用方法

（1）连接方法

CALL ITAC(DT,NN,DDY,DY,Y,ND,DYMAX,YMAX)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
DT	R	地面加速度时间间隔（单位：s）	不　变
NN	I	地面加速度时程数据总数	不　变
DDY	R 一维数组(*ND*)	地面加速度时程数据（单位：cm/s²）	不　变
DY	R 一维数组(*ND*)	不必赋值	地面速度时程（单位：cm/s）
Y	R 一维数组(*ND*)	不必赋值	地面位移时程（单位：cm）
ND	I	主程序中*DDY*,*DY*,*Y*的维数	不　变
DYMAX	R	不必赋值	地面速度最大值
YMAX	R	不必赋值	地面位移最大值

（2）必要的子程序及函数子程序

无

程序表

```
C    * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *            ITAC  1
C       SUBROUTINE FOR INTEGRATION OF SEISMIC ACCELEROGRAM                   ITAC  2
C    * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *            ITAC  3
C                                                                            ITAC  4
C                                          CODED BY Y.OHSAKI                 ITAC  5
C                                                                            ITAC  6
C       PURPOSE                                                              ITAC  7
C         TO INTEGRATE SEISMIC ACCELEROGRAM BY TRAPEZOIDAL ACCELERATION      ITAC  8
C         METHOD TO OBTAIN VELOCITY AND DISPLACEMENT                         ITAC  9
C                                                                            ITAC 10
C       USAGE                                                                ITAC 11
C         CALL ITAC(DT,NN,DDY,DY,Y,ND,DYMAX,YMAX)                            ITAC 12
C                                                                            ITAC 13
C       DESCRIPTION OF PARAMETERS                                            ITAC 14
C         DT       - TIME INCREMENT IN ACCELEROGRAM IN SEC                   ITAC 15
C         NN       - TOTAL NUMBER OF DATA IN ACCELEROGRAM                    ITAC 16
C         DDY(ND)  - ACCLERATION IN GALS                                     ITAC 17
C         DY(ND)   - VELOCITY IN KINES                                       ITAC 18
C         Y(ND)    - DISPLACEMENT IN CENTIMETERS                             ITAC 19
C         ND       - DIMENSION OF DDY,DY,Y IN CALLING PROGRAM                ITAC 20
C         DYMAX    - MAX. VELOCITY IN KINES                                  ITAC 21
C         YMAX     - MAX. DISPLACEMENT IN CENTIMETERS                        ITAC 22
C                                                                            ITAC 23
C       SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                        ITAC 24
C         NONE                                                               ITAC 25
C                                                                            ITAC 26
        SUBROUTINE ITAC(DT,NN,DDY,DY,Y,ND,DYMAX,YMAX)                        ITAC 27
C                                                                            ITAC 28
        DIMENSION DDY(ND),DY(ND),Y(ND)                                       ITAC 29
C                                                                            ITAC 30
        E=0.0                                                                ITAC 31
        F=0.0                                                                ITAC 32
        DYMAX=0.0                                                            ITAC 33
        YMAX=0.0                                                             ITAC 34
        DO 110 M=1,NN                                                        ITAC 35
        DY(M)=E+DDY(M)*DT/2.0                                                ITAC 36
        Y(M)=F+DDY(M)*(DT/2.0)**2                                            ITAC 37
        DYMAX=AMAX1(DYMAX,ABS(DY(M)))                                        ITAC 38
        YMAX=AMAX1(YMAX,ABS(Y(M)))                                           ITAC 39
        E=DY(M)+DDY(M)*DT/2.0                                                ITAC 40
        F=Y(M)+(DY(M)+E)*DT/2.0                                              ITAC 41
    110 CONTINUE                                                             ITAC 42
        RETURN                                                               ITAC 43
        END                                                                  ITAC 44
```

【例题8.7】 给出地面运动加速度时程，编写求地面运动速度与位移的主程序。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION NAME(12),FMT(5),DDY(6000),DY(6000),Y(6000)          1
C                                                                   2
      READ(5,501) NAME,DDYMAX,DT,NN,FMT                             3
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                   4
      CALL ITAC(DT,NN,DDY,DY,Y,6000,DYMAX,YMAX)                     5
      STOP                                                          6
C                                                                   7
  501 FORMAT(12A4/F12.0/F7.0/I5/5A4)                                8
C                                                                   9
      END                                                          10
```

输入埃尔森特罗1940南北分量地震动时程，名称$NAME$及加速度DDY、计算结果所得数组DY及Y的内容，即地面运动速度与位移时程及其最大值分别如图8.2(a)、(b)及(c)所示。

8.3.2 单质点系统的反应

设质点相对地表的位移为$x(t)$，阻尼比及固有圆频率为h及$\bar{\omega}$，地面运动加速度为$\ddot{y}(t)$，则单质点系的反应为式（3.18）的非齐次二阶常微分方程$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\omega^2\bar{\omega}=-\ddot{y}$的解，该式可写成

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}+2h\bar{\omega}\dot{x}_{t+\Delta t}+\bar{\omega}^2x_{t+\Delta t}=-\ddot{y}_{t+\Delta t} \tag{8.4}$$

按照梯形加速度法原则，速度及位移满足与式（8.2）相同的关系，即

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}^{*}_{t+\Delta t} &= \dot{x}_t + (\Delta t)\,\frac{\ddot{x}_t + \ddot{x}^{*}_{t+\Delta t}}{2} \\
x^{*}_{t+\Delta t} &= x_t + (\Delta t)\dot{x}_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\,\frac{\ddot{x}_t + \ddot{x}^{*}_{t+\Delta t}}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}
$$

代入式（8.4）整理得

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{x}^{*}_{t+\Delta t} &= -(\ddot{y}_{t+\Delta t} + 2h\bar{\omega}E_t + \bar{\omega}^2F_t)/R \\
\dot{x}^{*}_{t+\Delta t} &= E_t + (\Delta t/2)\ddot{x}_{t+\Delta t} \\
x^{*}_{t+\Delta t} &= F_t + (\Delta t/2)^2\ddot{x}^{*}_{t+\Delta t}
\end{aligned}\right\} \tag{8.6}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
R &= 1 + 2h(\bar{\omega}\Delta t/2) + \bar{\omega}^2(\Delta t/2)^2 \\
E_t &= \dot{x}_t + (\Delta t/2)\ddot{x}_t \\
F_t &= x_t + (\Delta t/2)(\dot{x}_t + E_t)
\end{aligned}\right\}
$$

R为与时间无关的量，E_t及F_t是在时刻 t 确定的量，由$E_t=F_t=0$开始，按式（8.6）可逐步求得各时刻的质点反应。

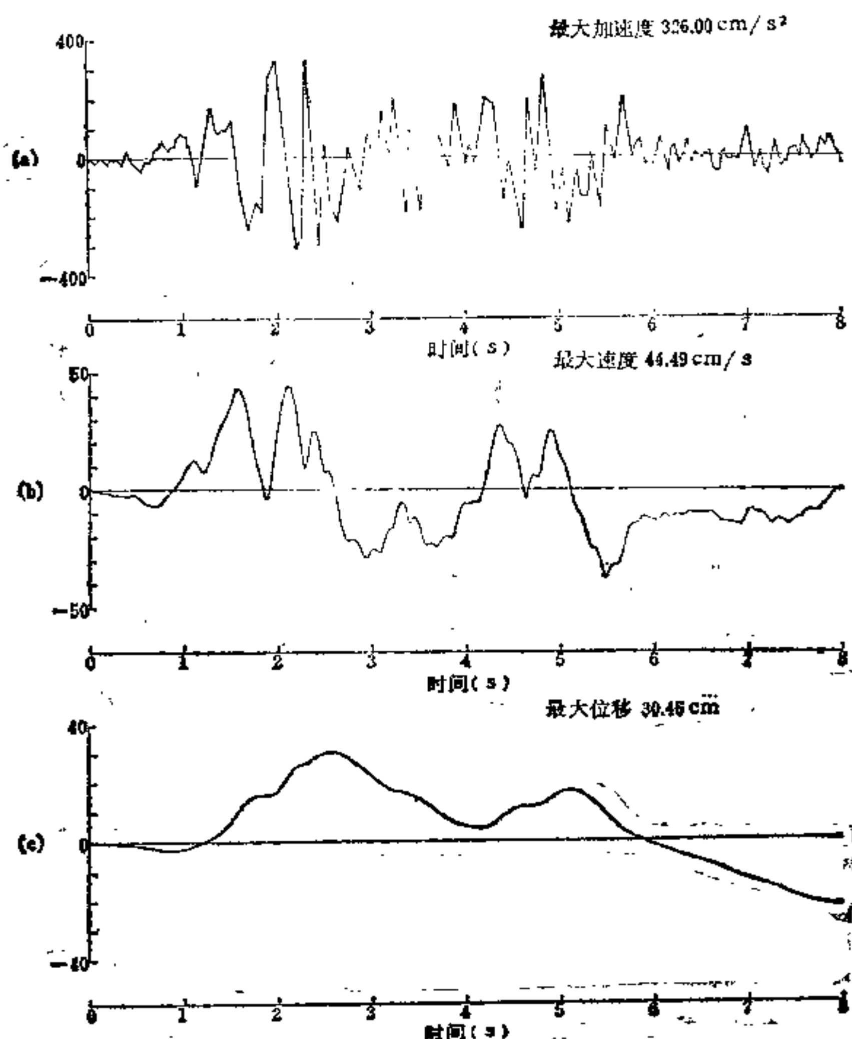


图8.2　埃尔森特罗1940南北分量地震动的(a)加速度，(b)速度，(c)位移时程曲线

SDOF（单质点系的反应）

目的

给定固有圆频率及阻尼比，求解受地面运动加速度作用的单质点系运动方程，求出绝对加速度、相对速度和相对位移。

使用方法

（1）连接方法

CALL SDOF (*H*,*W*,*DT*,*NN*,*DDY*,*ND*1,*ACC*,*XEL*,*DJS*,*ND*2)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
H	R	阻尼比(无量纲小数)	不　变
W	R	固有圆频率(单位：rad/s)	不　变
DT	R	地面运动加速度时间间隔(单位：s)	不　变
NN	I	地面运动加速度数据总数	不　变
DDY	R 一维数组(*ND*)	地面运动加速度时程数据 (单位：cm/s²)	不　变
*ND*1	I	主程序中*DDY*的维数	不　变
ACC	R 一维数组(*ND*)	不必赋值	绝对加速度反应(单位：cm/s²)
VEL	R 一维数据(*ND*)	不必赋值	相对速度反应(单位：cm/s)
DIS	R 一维数组(*ND*)	不必赋值	相对位移反应(单位：cm)
*ND*2	I	主程序中*ALL*,*VEL*,*DIS*的维数	不　变

（2）必要的子程序及函数子程序

无

程序表

```
C  * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *   SDOF   1
C     SUBROUTINE FOR RESPONSE OF SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM        SDOF   2
C  * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *   SDOF   3
C                                                                       SDOF   4
C                                               CODED BY Y.OHSAKI       SDOF   5
C                                                                       SDOF   6
C     PURPOSE                                                           SDOF   7
C       TO SOLVE EQUATION OF MOTION OF SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM  SDOF   8
C       WITH GIVEN NATURAL FREQUENCY AND DAMPING FACTOR EXCITED BY      SDOF   9
C       GIVEN GROUND ACCELERATION TO OBTAIN ABSOLUTE ACCELERATION,      SDOF  10
C       RELATIVE VELOCITY AND RELATIVE DISPLACEMENT RESPONSES           SDOF  11
C                                                                       SDOF  12
C     USAGE                                                             SDOF  13
C       CALL SDOF(H,W,DT,NN,DDY,ND1,ACC,VEL,DIS,ND2)                    SDOF  14
C                                                                       SDOF  15
C     DESCRIPTION OF PARAMETERS                                         SDOF  16
C       H          - DAMPING FACTOR IN DECIMAL FRACTION                 SDOF  17
C       W          - NATURAL CIRCULAR FREQUENCY IN RAD/SEC              SDOF  18
C       DT         - TIME INCREMENT IN ACCELEROGRAM IN SEC              SDOF  19
C       NN         - TOTAL NUMBER OF DATA IN ACCELEROGRAM               SDOF  20
C       DDY(ND1)   - ACCELEROGRAM IN GALS                               SDOF  21
C       ND1        - DIMENSION OF DDY IN CALLING PROGRAM                SDOF  22
C       ACC(ND2)   - ABSOLUTE ACCELERATION RESPONSE IN GALS             SDOF  23
C       VEL(ND2)   - RELATIVE VELOCITY RESPONSE IN KINES                SDOF  24
C       DIS(ND2)   - RELATIVE DISPLACEMENT RESPONSE IN CENTIMETERS      SDOF  25
C       ND2        - DIMENSION OF ACC,VEL,DIS,IN CALLING PROGRAM        SDOF  26
C                                                                       SDOF  27
```

```
C      SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                   SDOF 28
C        NONE                                                          SDOF 29
C                                                                      SDOF 30
       SUBROUTINE SDOF(H,W,DT,NN,DDY,ND1,ACC,VEL,DIS,ND2)              SDOF 31
C                                                                      SDOF 32
       DIMENSION DDY(ND1),ACC(ND2),VEL(ND2),DIS(ND2)                   SDOF 33
C                                                                      SDOF 34
C      INITIALIZATION                                                  SDOF 35
C                                                                      SDOF 36
       R=1.0+H*W*DT+(W*DT/2.0)**2                                      SDOF 37
       E=0.0                                                           SDOF 38
       F=0.0                                                           SDOF 39
C                                                                      SDOF 40
C      RESPONSE COMPUTATION                                            SDOF 41
C                                                                      SDOF 42
       DO 110 M=1,NN                                                   SDOF 43
       DDX=-(DDY(M)+2.0*H*W*E+W**2*F)/R                                SDOF 44
       DX=E+DDX*DT/2.0                                                 SDOF 45
       X=F+DDX*(DT/2.0)**2                                             SDOF 46
       ACC(M)=DDX+DDY(M)                                               SDOF 47
       VEL(M)=DX                                                       SDOF 48
       DIS(M)=X                                                        SDOF 49
       E=DX+DDX*DT/2.0                                                 SDOF 50
       F=X+(DX+E)*DT/2.0                                               SDOF 51
  110  CONTINUE                                                        SDOF 52
       RETURN                                                          SDOF 53
       END                                                             SDOF 54
```

【例题8.8】 将埃尔森特罗1940南北分量加速度记录作为地面运动作用于单质点系，其阻尼比为$h=0.05$，固有周期为$T=0.3$s，编出求绝对加速度反应、相对速度反应及相对位移反应时程的主程序。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION NAME(12),FMT(5),DDY(1000),ACC(1000),VEL(1000),DIS(1000)     1
C                                                                           2
      READ(5,501) NAME,DT,NN,FMT                                            3
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                           4
      W=6.283185/0.3                                                        5
      CALL SDOF(0.05,W,DT,NN,DDY,1000,ACC,VEL,DIS,1000)                     6
      STOP                                                                  7
C                                                                           8
  501 FORMAT(12A4//F7.0/I5/5A4)                                             9
      END                                                                  10
```

绝对加速度、相对速度及相对位移反应时程分别放在数组ACC，VEL，DIS中，图形如图3.5(a)、(b)、(c)所示。

【例题8.9】 设单质点系阻尼比为$h=0.05$，无阻尼固有周期为$T=0.3$，0.6及1.2s，编出埃尔森特罗1940南北分量地面运动作用时绝对加速度反应时程分析的程序。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION NAME(12),FMT(5),DDY(1000),T(3),RES(1000),DUMMY(1000),      1
     1          ACC(3,1000)                                                2
      DATA      T/0.3,0.6,1.2/                                             3
C                                                                          4
      READ(5,501) NAME,DT,NN,FMT                                           5
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                          6
      DO 120 IT=1,3                                                        7
      W=6.283185/T(IT)                                                     8
      CALL SDOF(0.05,W,DT,NN,DDY,1000,RES,DUMMY,DUMMY,1000)                9
      DO 110 M=1,NN                                                       10
      ACC(IT,M)=RES(M)                                                    11
  110 CONTINUE                                                            12
  120 CONTINUE                                                            13
      STOP                                                                14
C                                                                         15
  501 FORMAT(12A4//F7.0/I5/5A4)                                           16
      END                                                                 17
```

$T=0.3$，0.6及1.2s时的绝对加速度反应时程分别放在第1下标＝1，2，3的数组ACC中，其图形如图3.6(a)、(b)、(c)所示。

【例题8.10】 对例题6.8的五质点系，设各振型阻尼比均为5%，给定地面运动加速度时程，编出用振型叠加法求各质点反应时程的主程序。

〔解〕 先求出系统的固有圆频率，由式（6.102）解出振型基本解，然后用式（6.104）作振型叠加，程序举例如下：

```
      DIMENSION FMT(5),DDY(1000),EM(60,60),EK(60,60),DAMP(60),W(60),       1
     1          U(60,60),A(60,60),B(60,60),DDQ(1000),DQ(1000),Q(1000),     2
     2          ACC(60,1000),VEL(60,1000),DIS(60,1000)                     3
      DATA      ACC/60000*0.0/,VEL/60000*0.0/,DIS/60000*0.0/               4
      DATA      N/5/,DAMP/5*0.05,55*0.0/,NMODE/5/                          5
C                                                                          6
      READ(5,501) DT,NN,FMT                                                7
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                          8
      READ(5,502) ((EM(I,J),J=1,N),I=1,N),((EK(I,J),J=1,N),I=1,N)          9
      CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,60)                                        10
      DO 130 J=1,NMODE                                                     11
      CALL SDOF(DAMP(J),W(J),DT,NN,DDY,1000,DDQ,DQ,Q,1000)                 12
      DO 120 I=1,N                                                         13
      DO 110 M=1,NN                                                        14
      ACC(I,M)=ACC(I,M)+U(I,J)*DDQ(M)                                      15
      VEL(I,M)=VEL(I,M)+U(I,J)*DQ(M)                                       16
      DIS(I,M)=DIS(I,M)+U(I,J)*Q(M)                                        17
  110 CONTINUE                                                             18
  120 CONTINUE                                                             19
  130 CONTINUE                                                             20
      STOP                                                                 21
C                                                                          22
  501 FORMAT(//F7.0/I5/5A4)                                                23
  502 FORMAT(5F10.0)                                                       24
      END                                                                  25
```

结果各质点的绝对加速度、相对速度及相对位移反应时程分别放在数组*ACC*，*VEL*，*DIS*中，其内容与直接积分法的结果（参见例题8.14）完全相同。计算中叠加了所有振型（*NMODE*＝5）的解，如果只叠加前三个振型，实用上几乎没有差别。

8.3.3 反应谱

无阻尼固有周期为T及阻尼比为h的单质点系，在地面加速度$\ddot{y}(t)$作用下的反应时程可由方程

$$\ddot{x}+2h\bar{\omega}\dot{x}+\bar{\omega}^2x=-\ddot{y} \qquad (a)$$

解出，其中$\bar{\omega}=2\pi=T$。设求得的加速度、速度及位移反应时程为$\ddot{x}(t)$，$\dot{x}(t)$及$x(t)$，则绝对加速度、相对速度和相对位移反应谱记为$S_a(T,h)=|\ddot{x}+\ddot{y}|_{max}$，$S_v(T,h)=|\dot{x}|_{max}$，$S_d(T,h)=|x|_{max}$。

求解式(a)的程序*SDOF*已在8.3.2节介绍，下面的程序*REST*（Response Spectrum），只是在给定的无阻尼固有周期及阻尼比下反复调用子程序*SDOF*，求其最大值。计算结果放在数组*RES*中，数组*RES*的第1个下标对应数组*T*中给定的固有周期，第2个下标对应于数组*H*中给定的阻尼比，第3下标＝1，2，3，分别对应于绝对加速度、相对速度和相对位移谱。

另外，程序前半部分计算了输入地面运动的最大加速度、最大速度和最大位移。计算方法与程序*ITAC*相同，结果放在数组*EQMAX*中。

REST（反应谱）

目的

给定阻尼比，求加速度时程的绝对加速度反应谱、相对速度反应谱及相对位移反应谱。同时计算输入时程的最大加速度、最大速度和最大位移。

使用方法

（1）连接方法

CALL REST(NH, H, ND_1, NT, T, ND_2, DT, NN, DDY, ND_3, RES, EQMAX)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
NH	I	阻尼比的总数	不　变
H	R 一维数组(ND_1)	阻尼比的值(无量纲小数)	不　变
ND_1	I	主程序中*H*的维数	不　变
NT	I	反应计算时周期的总数	不　变
T	R 一维数组(ND_2)	反应计算时的周期(单位：s)	不　变
ND_2	I	主程序中*T*的元素个数	不　变
DT	R	加速度时程的时间间隔(单位：s)	不　变
NN	I	加速度时程数据总数	不　变
DDY	R 一维数组(ND_3)	加速度时程(单位：cm/s²)	不　变
ND_3	I	主程序中*DDY*的维数	不　变
RES	R 三维数组(ND_2, ND_1, 3)	不必赋值	第3下标＝1：绝对加速度反应谱(单位：cm/s²) 第3下标＝2：相对速度反应谱(单位：cm/s) 第3下标＝3：相对位移反应谱(单位：cm)
EQMAX	R 一维数组(3)	不必赋值	下标＝1：最大输入加速度(单位：cm/s²) 下标＝2：最大输入速度(单位：cm/s) 下标＝3：最大输入位移(单位：cm)

（2）必要的子程序及函数子程序

SDOF

程序表

```
C  * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *       REST   1
C     SUBROUTINE FOR COMPUTATION OF RESPONSE SPECTRA             REST   2
C  * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *       REST   3
C                                                                REST   4
C                                  CODED BY Y.OHSAKI             REST   5
C                                                                REST   6
C     PURPOSE                                                    REST   7
C       TO COMPUTE ABSOLUTE ACCELERATION, RELATIVE VELOCITY AND  REST   8
C       RELATIVE DISPLACEMENT RESPONSE SPECTRA OF ACCELEROGRAM   REST   9
C       FOR SPECIFIED DAMPING FACTORS. MAXIMUM INPUT ACCELERATION,REST  10
C       VELOCITY AND DISPLACEMENT ARE ALSO COMPUTED              REST  11
C                                                                REST  12
C     USAGE                                                      REST  13
C       CALL REST(NH,H,ND1,NT,T,ND2,DT,NN,DDY,ND3,RES,EQMAX)     REST  14
C                                                                REST  15
C     DESCRIPTION OF PARAMETERS                                  REST  16
C       NH             - TOTAL NUMBER OF DAMPING FACTORS         REST  17
C       H(ND1)         - DAMPING FACTORS IN DECIMAL FRACTION     REST  18
C       ND1            - DIMENSION OF H IN CALLING PROGRAM       REST  19
C       NT             - TOTAL NUMBER OF PERIODS FOR WHICH RESPONSES REST  20
C                        ARE COMPUTED                            REST  21
```

```
C        T(ND2)            - PERIODS IN SEC FOR WHICH RESPONSES ARE          REST 22
C                            COMPUTED                                         REST 23
C        ND2               - DIMENSION OF T IN CALLING PROGRAM                REST 24
C        DT                - TIME INCREMENT IN ACCELEROGRAM IN SEC            REST 25
C        NN                - TOTAL NUMBER OF DATA IN ACCELEROGRAM             REST 26
C                            NN.LE.6000                                       REST 27
C        DDY(ND3)          - ACCELEROGRAM IN GALS                             REST 28
C        ND3               - DIMENSION OF DDY IN CALLING PROGRAM              REST 29
C        RES(ND2,ND1,3)    - FOR LAST SUBSCRIPT = 1,2,3, ABSOLUTE             REST 30
C                            ACCELERATION, RELATIVE VELOCITY AND RELATIVE     REST 31
C                            DISPLACEMENT RESPONSES, RESPECTIVELY             REST 32
C        EQMAX(3)          - FOR SUBSCRIPT = 1,2,3, MAX. INPUT ACCELERATION,REST 33
C                            VELOCITY AND DISPLACEMENT, RESPECTIVELY          REST 34
C                                                                             REST 35
C     SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                           REST 36
C        SDOP                                                                 REST 37
C                                                                             REST 38
      SUBROUTINE REST(NH,H,ND1,NT,T,ND2,DT,NN,DDY,ND3,RES,EQMAX)              REST 39
C                                                                             REST 40
      DIMENSION H(ND1),T(ND2),DDY(ND3),RES(ND2,ND1,3),EQMAX(3)                REST 41
      DIMENSION ACC(6000),VEL(6000),DIS(6000)                                 REST 42
C                                                                             REST 43
C     MAXIMA OF INPUT                                                         REST 44
C                                                                             REST 45
      E=0.0                                                                   REST 46
      F=0.0                                                                   REST 47
      DDYMAX=0.0                                                              REST 48
      DYMAX=0.0                                                               REST 49
      YMAX=0.0                                                                REST 50
      DO 110 M=1,NN                                                           REST 51
      DY=E+DDY(M)*DT/2.0                                                      REST 52
      Y=F+DDY(M)*(DT/2.0)**2                                                  REST 53
      DDYMAX=AMAX1(DDYMAX,ABS(DDY(M)))                                        REST 54
      DYMAX=AMAX1(DYMAX,ABS(DY))                                              REST 55
      YMAX=AMAX1(YMAX,ABS(Y))                                                 REST 56
      E=DY+DDY(M)*DT/2.0                                                      REST 57
      F=Y+(DY+E)*DT/2.0                                                       REST 58
  110 CONTINUE                                                                REST 59
      EQMAX(1)=DDYMAX                                                         REST 60
      EQMAX(2)=DYMAX                                                          REST 61
      EQMAX(3)=YMAX                                                           REST 62
C                                                                             REST 63
C     MAXIMUM RESPONSES                                                       REST 64
C                                                                             REST 65
      DO 160 L=1,NH                                                           REST 66
      DO 150 K=1,NT                                                           REST 67
      IF(T(K).EQ.0.0) GO TO 130                                               REST 68
      W=6.283185/T(K)                                                         REST 69
      CALL SDOP(H(L),W,DT,NN,DDY,ND3,ACC,VEL,DIS,6000)                        REST 70
      ACCMAX=0.0                                                              REST 71
      VELMAX=0.0                                                              REST 72
      DISMAX=0.0                                                              REST 73
      DO 120 M=1,NN                                                           REST 74
      ACCMAX=AMAX1(ACCMAX,ABS(ACC(M)))                                        REST 75
      VELMAX=AMAX1(VELMAX,ABS(VEL(M)))                                        REST 76
      DISMAX=AMAX1(DISMAX,ABS(DIS(M)))                                        REST 77
  120 CONTINUE                                                                REST 78
      GO TO 140                                                               REST 79
  130 ACCMAX=DDYMAX                                                           REST 80
      VELMAX=0.0                                                              REST 81
      DISMAX=0.0                                                              REST 82
  140 RES(K,L,1)=ACCMAX                                                       REST 83
      RES(K,L,2)=VELMAX                                                       REST 84
      RES(K,L,3)=DISMAX                                                       REST 85
  150 CONTINUE                                                                REST 86
  160 CONTINUE                                                                REST 87
      RETURN                                                                  REST 88
      END                                                                     REST 89
```

【例题8.11】 编写求阻尼比为 $n=0$，5，10%时地面运动反应谱的主程序。

〔解〕 以DATA语句给出计算周期点，程序如下：

```
      DIMENSION H(5),T(200),NAME(12),FMT(5),DDY(6000),RES(200,5,3),        1
     1          EQMAX(3)                                                   2
      DATA      H/0.00,0.05,0.10,2*0.00/                                   3
      DATA      T/0.00,0.05,0.10,0.15,0.20,0.25,0.30,0.35,0.40,0.45,       4
     1            0.50,0.55,0.60,0.65,0.70,0.75,0.80,0.85,0.90,0.95,       5
     2            1.00,1.20,1.40,1.60,1.80,2.00,2.20,2.40,2.60,2.80,       6
     3            3.00,3.50,4.00,4.50,5.00, 165*0.00/                      7
C                                                                          8
      READ(5,501) NAME,DT,NN,FMT                                           9
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                         10
      CALL REST(3,H,5,35,T,200,DT,NN,DDY,6000,RES,EQMAX)                  11
      STOP                                                                12
C                                                                         13
  501 FORMAT(12A4//F7.0/I5/5A4)                                           14
      END                                                                 15
```

计算得到的反应谱放在数组RES中。输入埃尔森特罗1940南北分量地震动时，绝对加速度反应谱、相对速度反应谱和相对位移反应谱图形分别示于图3.7到图3.9，图中还同时画出了$EQMAX$中存放的最大加速度、最大速度和最大位移值。

【例题8.12】 设图6.12所示的5质点系统具有一阶振型的阻尼比为5%的内部粘性型阻尼，给定地面运动加速度时程，编出用反应谱、振型叠加法求各层剪力及弯矩的主程序。质量矩阵与刚度矩阵的数据逐行输入。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION FMT(5),DDY(1000),EM(60,60),EK(60,60),W(60),U(60,60),     1
     1          A(60,60),B(60,60),DAMP(1),T(1),RES(1,1,3),DUMMY(3),       2
     2          HEIGHT(60),XJMAX(60),PJMAX(60),QJMAX(60),RJMAX(60),       3
     3          QMAX(60),RMAX(60)                                         4
      DATA      QMAX/60*0.0/,RMAX/60*0.0/                                 5
      DATA      N/5/,NMODE/5/,HEIGHT/4*3.5,4.0,55*0.0/                    6
C                                                                         7
      READ(5,501) DT,NN,FMT                                               8
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                         9
      READ(5,502) ((EM(I,J),J=1,N),I=1,N),((EK(I,J),J=1,N),I=1,N)        10
      CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,60)                                      11
      DO 130 J=1,NMODE                                                   12
      T(1)=6.283185/W(J)                                                 13
      DAMP(1)=0.05*W(J)/W(1)                                             14
      CALL REST(1,DAMP,1,1,T,1,DT,NN,DDY,1000,RES,DUMMY)                 15
      DO 110 I=1,N                                                       16
      XJMAX(I)=U(I,J)*RES(1,1,3)                                         17
  110 CONTINUE                                                           18
      CALL PROM(EK,XJMAX,PJMAX,N,1,60,1)                                 19
      QJMAX(1)=PJMAX(1)                                                  20
      RJMAX(1)=HEIGHT(1)*QJMAX(1)                                        21
      QMAX(1)=QMAX(1)+QJMAX(1)**2                                        22
      RMAX(1)=RMAX(1)+RJMAX(1)**2                                        23
      DO 120 I=2,N                                                       24
      QJMAX(I)=QJMAX(I-1)+PJMAX(I)                                       25
      RJMAX(I)=RJMAX(I-1)+HEIGHT(I)*QJMAX(I)                             26
      QMAX(I)=QMAX(I)+QJMAX(I)**2                                        27
      RMAX(I)=RMAX(I)+RJMAX(I)**2                                        28
  120 CONTINUE                                                           29
  130 CONTINUE                                                           30
      WRITE(6,601)                                                       31
      DO 140 I=1,N                                                       32
      L=N+1-I                                                            33
      Q=SQRT(QMAX(I))                                                    34
      R=SQRT(RMAX(I))                                                    35
      WRITE(6,602) L,Q,R                                                 36
  140 CONTINUE                                                           37
      STOP                                                               38
C                                                                        39
  501 FORMAT(//F7.0/I5/5A4)                                              40
  502 FORMAT(5F10.0)                                                     41
  601 FORMAT(1H1/5(1H0/)/1H0,50X,5HSTORY,3X,10HSHEAR(TON),3X,            42
     1       13HMOMENT(TON*M))                                           43
  602 FORMAT(1H0,50X,I3,F13.1,F14.0)                                     44
      END                                                                45
```

当输入埃尔森特罗1940南北分量地震动（最大加速度326cm/s²）时，输出结果如下，这个结果如图6.18虚线所示。振型叠加时如果只考虑前三阶振型，则令DATA语句中$NMODE=3$即可。

层	剪力(t)	弯矩(t·m)
5	65.4	229.
4	109.7	612.
3	143.9	1114.
2	167.3	1696.
1	181.3	2417.

8.3.4 多质点系统的反应

算法与单质点系完全相同，不过是把标量m，c^{*}，k，x等改为矩阵或矢量。即运动方程式为

$$[M]\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}+[C]\{\dot{x}\}_{t+\Delta t}+[K]\{x\}_{t+\Delta t}=-\ddot{y}_{t+\Delta t}[M]\{1\} \tag{a}$$

按照梯形加速度法，与式（8.5）相同有

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{x}\}_{t+\Delta t}&=\{\dot{x}\}_t+(\Delta t/2)\{\ddot{x}\}_t+(\Delta t/2)\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}\\ \{x\}_{t+\Delta t}&=\{x\}_t+(\Delta t)\{\dot{x}\}_t+(\Delta t/2)^2\{\ddot{x}\}_t+(\Delta t/2)^2\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，整理得

$$\left.\begin{aligned}\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}&=-[R]^{-1}(\ddot{y}_{t+\Delta t}[M]\{1\}+[C]\{E\}_t+[K]\{F\}_t)\\ \{\dot{x}\}_{t+\Delta t}&=\{E\}_t+(\Delta t/2)\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}\\ \{x\}_{t+\Delta t}&=\{F\}_t+(\Delta t/2)^2\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[R]&=[M]+(\Delta t/2)[C]+(\Delta t/2)^2[K]\\ \{E\}_t&=\{\dot{x}\}_t+(\Delta t/2)\{\ddot{x}\}_t\\ \{F\}_t&=\{x\}_t+(\Delta t/2)(\{\dot{x}\}_t+\{E\}_t)\end{aligned}\right\}$$

$[R]$是与时间无关的矩阵，$\{E\}_t$及$\{F\}_t$是在时刻 t 确定的矢量，由初始值$\{E\}_t=\{F\}_t=\{0\}$开始，按式（8.7）可逐步计算出各时刻各质点的反应。

式(a)是仅用于计算主位移的运动方程。对于包括从位移在内的一般情况，因为从位移方向上无输入作用，式(a)右边对应行的值为零。因此要把式(a)右边和式（8.7)第1式中单位矢量$\{1\}$改为影响矢量$\{E\}$，惯性项中与主位移对应行的值为1，与从位移对应行的值为零。

下面的程序*MDOF* (Response of Multi-Degree of Freedom System)按上述方法在给定质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵及影响矢量后求 n 质点系统在地面运动加速度作用下的绝对加速度、相对速度和相对位移反应，计算结果为如下反应矩阵形式：

$$[\ddot{x}+\ddot{y}]_t=\left[\left\{\begin{matrix}\ddot{x}_n+\ddot{y}\\ \vdots\\ \ddot{x}_2+\ddot{y}\\ \ddot{x}_1+\ddot{y}\end{matrix}\right\}_{t=0}\left\{\begin{matrix}\ddot{x}_n+\ddot{y}\\ \vdots\\ \ddot{x}_2+\ddot{y}\\ \ddot{x}_1+\ddot{y}\end{matrix}\right\}_{t=\Delta t}\left\{\begin{matrix}\ddot{x}_n+\ddot{y}\\ \vdots\\ \ddot{x}_2+\ddot{y}\\ \ddot{x}_1+\ddot{y}\end{matrix}\right\}_{t=2\Delta t}\cdots\left\{\begin{matrix}\ddot{x}_n+\ddot{y}\\ \vdots\\ \ddot{x}_2+\ddot{y}\\ \ddot{x}_1+\ddot{y}\end{matrix}\right\}_{t=(N-1)\Delta t}\right]$$

$$[\dot{x}]_t=\left[\left\{\begin{matrix}\dot{x}_n\\ \vdots\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_1\end{matrix}\right\}_{t=0}\left\{\begin{matrix}\dot{x}_n\\ \vdots\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_1\end{matrix}\right\}_{t=\Delta t}\left\{\begin{matrix}\dot{x}_n\\ \vdots\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_1\end{matrix}\right\}_{t=2\Delta t}\cdots\left\{\begin{matrix}\dot{x}_n\\ \vdots\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_1\end{matrix}\right\}_{t=(N-1)\Delta t}\right]$$

$$[x]_t=\left[\left\{\begin{matrix}x_n\\ \vdots\\ x_2\\ x_1\end{matrix}\right\}_{t=0}\left\{\begin{matrix}x_n\\ \vdots\\ x_2\\ x_1\end{matrix}\right\}_{t=\Delta t}\left\{\begin{matrix}x_n\\ \vdots\\ x_2\\ x_1\end{matrix}\right\}_{t=2\Delta t}\cdots\left\{\begin{matrix}x_n\\ \vdots\\ x_2\\ x_1\end{matrix}\right\}_{t=(N-1)\Delta t}\right]$$

式中 N 为地面运动加速度数据总数。

各质点的反应时程分别放在数组*ACC*，*VEL*，*DIS*中。

于程序*MINV*与例题8.6中的相同。

MDOF（多质点系的反应）

目的

给定多质点系的质量、阻尼、刚度矩阵及影响矢量，解地面运动加速度作用下的运动方程，求绝对加速度、相对速度和相对位移反应。

使用方法

（1）连接方法

CALL MDOF(N,EN,C,EK,IV,ND1,DT,NN,DDY,ACC,VEL,DIS,ND2)

变 量	类 型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
N	I	自由度数目$N \leq 60$	不 变
EM	R 二维数组(*ND1,ND1*)	质量矩阵	不 变
C	R 二维数组(*ND1,ND1*)	阻尼矩阵	不 变
EK	R 二维数组(*ND1,ND1*)	刚度矩阵	不 变
IV	I 一维数组(*ND1*)	影响矢量	不 变
ND1	I	主程序中*EM,C,EK,IV*的维数	不 变
DT	R	地面运动加速度时间间隔（单位：s）	不 变
NN	I	地面运动加速度数据总数	不 变
DDY	R 一维数组(*ND2*)	地面运动加速度时程（单位：cm/s^2）	不 变
ACC	R 二维数组(*ND1,ND2*)	不必赋值	绝对加速度反应矩阵
VEL	R 二维数组(*ND1,ND2*)	不必赋值	相对速度反应矩阵
DIS	R 二维数组(*ND1,ND2*)	不必赋值	相对位移矩阵
ND2	I	主程序中*DDY,ACC,VEL,DIS*的维数	不 变

（2）必要的子程序及函数子程序

MINV

程序表

```
C   * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *      MDOF  1
C     SUBROUTINE FOR RESPONSE OF MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM             MDOF  2
C   * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *      MDOF  3
C                                                                           MDOF  4
C                                                   CODED BY Y.OHSAKI       MDOF  5
C                                                                           MDOF  6
C     PURPOSE                                                               MDOF  7
C       TO SOLVE SIMULTANEOUS EQUATIONS OF MOTION OF MULTI-DEGREE-OF-       MDOF  8
C       FREEDOM SYSTEM WITH GIVEN MASS, DAMPING, STIFFNESS MATRICES         MDOF  9
C       AND EXCITED BY GIVEN GROUND ACCELERATION                            MDOF 10
C                                                                           MDOF 11
C     USAGE                                                                 MDOF 12
C       CALL MDOF(N,EM,C,EK,IV,ND1,DT,NN,DDY,ACC,VEL,DIS,ND2)               MDOF 13
C                                                                           MDOF 14
```

```
C     DESCRIPTION OF PARAMETERS                                          MDOF 15
C       N             - NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM  N.LE.60             MDOF 16
C       EM(ND1,ND1)   - MASS MATRIX                                       MDOF 17
C       C(ND1,ND1)    - DAMPING MATRIX                                    MDOF 18
C       EK(ND1,ND1)   - STIFFNESS MATRIX                                  MDOF 19
C       IV(ND1)       - INFLUENCE VECTOR                                  MDOF 20
C       ND1           - DIMENSION OF EM,C,EK,IV IN CALLING PROGRAM        MDOF 21
C       DT            - TIME INCREMENT IN ACCELEROGRAM IN SEC             MDOF 22
C       NN            - TOTAL NUMBER OF DATA IN ACCELEROGRAM              MDOF 23
C       DDY(ND2)      - ACCELEROGRAM IN GALS                              MDOF 24
C       ACC(ND1,ND2)  - ABSOLUTE ACCELERATION RESPONSE MATRIX             MDOF 25
C       VEL(ND1,ND2)  - RELATIVE VELOCITY RESPONSE MATRIX                 MDOF 26
C       DIS(ND1,ND2)  - RELATIVE DISPLACEMENT RESPONSE MATRIX             MDOF 27
C       ND2           - DIMENSION OF DDY,ACC,VEL,DIS IN CALLING PROGRAM   MDOF 28
C                                                                         MDOF 29
C     SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                       MDOF 30
C       MINV                                                              MDOF 31
C                                                                         MDOF 32
      SUBROUTINE MDOF(N,EM,C,EK,IV,ND1,DT,NN,DDY,ACC,VEL,DIS,ND2)         MDOF 33
C                                                                         MDOF 34
      DIMENSION EM(ND1,ND1),C(ND1,ND1),EK(ND1,ND1),IV(ND1),DDY(ND2),      MDOF 35
     1          ACC(ND1,ND2),VEL(ND1,ND2),DIS(ND1,ND2)                    MDOF 36
      DIMENSION R(60,60),E(60),F(60),RMIV(60),RC(60,60),RK(60,60),        MDOF 37
     1          DDX(60),DX(60),X(60)                                      MDOF 38
C                                                                         MDOF 39
C     INITIALIZATION                                                      MDOF 40
C                                                                         MDOF 41
      DO 120 I=1,N                                                        MDOF 42
      DO 110 J=1,N                                                        MDOF 43
      R(I,J)=EM(I,J)+C(I,J)*DT/2.0+EK(I,J)*(DT/2.0)**2                    MDOF 44
  110 CONTINUE                                                            MDOF 45
      E(I)=0.0                                                            MDOF 46
      F(I)=0.0                                                            MDOF 47
  120 CONTINUE                                                            MDOF 48
      CALL MINV(N,R,60)                                                   MDOF 49
      DO 150 I=1,N                                                        MDOF 50
      SM=0.0                                                              MDOF 51
      DO 140 J=1,N                                                        MDOF 52
      SM=SM-R(I,J)*EM(J,J)*FLOAT(IV(J))                                   MDOF 53
      SC=0.0                                                              MDOF 54
      SK=0.0                                                              MDOF 55
      DO 130 K=1,N                                                        MDOF 56
      SC=SC-R(I,K)*C(K,J)                                                 MDOF 57
      SK=SK-R(I,K)*EK(K,J)                                                MDOF 58
  130 CONTINUE                                                            MDOF 59
      RC(I,J)=SC                                                          MDOF 60
      RK(I,J)=SK                                                          MDOF 61
  140 CONTINUE                                                            MDOF 62
      RMIV(I)=SM                                                          MDOF 63
  150 CONTINUE                                                            MDOF 64
C                                                                         MDOF 65
C     RESPONSE COMPUTATION                                                MDOF 66
C                                                                         MDOF 67
      DO 190 M=1,NN                                                       MDOF 68
      DO 170 I=1,N                                                        MDOF 69
      SDDX=DDY(M)*RMIV(I)                                                 MDOF 70
      DO 160 K=1,N                                                        MDOF 71
      SDDX=SDDX+RC(I,K)*E(K)+RK(I,K)*F(K)                                 MDOF 72
  160 CONTINUE                                                            MDOF 73
      DDX(I)=SDDX                                                         MDOF 74
      DX(I)=E(I)+SDDX*DT/2.0                                              MDOF 75
      X(I)=F(I)+SDDX*(DT/2.0)**2                                          MDOF 76
      ACC(I,M)=SDDX+DDY(M)                                                MDOF 77
      VEL(I,M)=DX(I)                                                      MDOF 78
      DIS(I,M)=X(I)                                                       MDOF 79
  170 CONTINUE                                                            MDOF 80
      DO 180 I=1,N                                                        MDOF 81
      E(I)=DX(I)+DDX(I)*DT/2.0                                            MDOF 82
      F(I)=X(I)+(DX(I)+E(I))*DT/2.0                                       MDOF 83
  180 CONTINUE                                                            MDOF 84
  190 CONTINUE                                                            MDOF 85
      RETURN                                                              MDOF 86
      END                                                                 MDOF 87
```

【例题8.13】 编出求例题4.1中双质点系对地震动加速度反应的主程序，设阻尼系数 $c_1=1.0$，$c_2=0.6\text{t}\cdot\text{s/cm}$。

〔解〕 程序如下：

```
      DIMENSION EM(2,2),C(2,2),EK(2,2),IV(2),NAME(12),FMT(5),DDY(9ØØ),          1
     1          ACC(2,8ØØ),VEL(2,8ØØ),DIS(2,8ØØ)                                 2
      DATA      EM/Ø.Ø55,Ø.ØØØ,Ø.ØØØ,Ø.Ø5Ø/,C/Ø.6,-Ø.6,-Ø.6,1.6/,                3
     1          EK/12Ø.,-12Ø.,-12Ø.,24Ø./,IV/1,1/                                4
C                                                                                5
      READ(5,5Ø1) NAME,DT,NN,FMT                                                 6
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                                7
      CALL MDOF(2,EM,C,EK,IV,2,DT,NN,DDY,ACC,VEL,DIS,8ØØ)                        8
      STOP                                                                       9
C                                                                               1Ø
  5Ø1 FORMAT(12A4//F7.Ø/I5/5A4)                                                 11
      END                                                                       12
```

结果放在数组*ACC*，*EVL*，*DIS*中，设输入为埃尔森特罗1940南北分量地震动时，质点m_2的绝对加速度、相对速度和相对位移时程曲线分别如图6.14(a)、(b)及(c)所示。

【例题8.14】 对例题6.8的五质点系，设各阶振型阻尼比均为5%，编出给定地面运动加速度时程下，用直接积分法求各质点反应的主程序。

〔解〕 逐行输入式（6.5.2）及式（6.5.3）所示的质量矩阵与刚度矩阵各元素，所求程序如下：

```
      DIMENSION NAME(12),FMT(5),DDY(1ØØØ),EM(6Ø,6Ø),C(6Ø,6Ø),EK(6Ø,6Ø),          1
     1          IV(6Ø),W(6Ø),U(6Ø,6Ø),A(6Ø,6Ø),B(6Ø,6Ø),D(6Ø,6Ø),                 2
     2          UT(6Ø,6Ø),ACC(6Ø,1ØØØ),VEL(6Ø,1ØØØ),DIS(6Ø,1ØØØ)                   3
      DATA      N/5/,DAMP/Ø.Ø5/,IV/6Ø*1/,D/36ØØ*Ø.Ø/                               4
C                                                                                  5
      READ(5,5Ø1) NAME,DT,NN,FMT                                                   6
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                                  7
      READ(5,5Ø2) ((EM(I,J),J=1,N),I=1,N),((EK(I,J),J=1,N),I=1,N)                  8
      CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,6Ø)                                                9
      CALL CONG(N,EM,U,A,6Ø)                                                      1Ø
      DO 11Ø J=1,N                                                                11
      D(J,J)=2.Ø*DAMP*W(J)/A(J,J)                                                 12
  11Ø CONTINUE                                                                    13
      CALL PROM(EM,U,A,N,N,6Ø,6Ø)                                                 14
      CALL PROM(A,D,B,N,N,6Ø,6Ø)                                                  15
      DO 13Ø I=1,N                                                                16
      DO 12Ø J=1,N                                                                17
      UT(I,J)=U(J,I)                                                              18
  12Ø CONTINUE                                                                    19
  13Ø CONTINUE                                                                    2Ø
      CALL PROM(B,UT,A,N,N,6Ø,6Ø)                                                 21
      CALL PROM(A,EM,C,N,N,6Ø,6Ø)                                                 22
      CALL MDOF(N,EM,C,EK,IV,6Ø,DT,NN,DDY,ACC,VEL,DIS,1ØØØ)                       23
      STOP                                                                        24
C                                                                                 25
  5Ø1 FORMAT(12A4//F7.Ø/I5/5A4)                                                   26
  5Ø2 FORMAT(5F1Ø.Ø)                                                              27
      END                                                                         28
```

计算所得各质点绝对加速度、相对速度和相对位移反应时程分别放在数组*ACC*，*VEL*，*DIS*中，输入为埃尔森特罗1940南北分量地震动时，质点m_5的相对位移时程为二维数组*DIS*的第1行，其图形为图6.15。

系统的阻尼矩阵在执行第22条语句时放在数组*C*中，其内容为式（6.93）所示。

【例题8.15】 设图6.12所示的5质点系统具有一阶振型阻尼比为5%的内部粘性型阻尼，给定地面运动加速度时程，编出用直接积分法求各层的最大剪力、层间剪力系数及最大弯矩的主程序。质量矩阵及刚度矩阵逐行输入，各层的层高单行输入。

〔解〕 程序如下，到求出反应量的第26条语句为止，除了振型阻尼系数假定为内部粘性型外，与前例几乎相同。

```
      DIMENSION FMT(5),DDY(1ØØØ),EM(6Ø,6Ø),C(6Ø,6Ø),EK(6Ø,6Ø),IV(6Ø),        1
     1          W(6Ø),U(6Ø,6Ø),A(6Ø,6Ø),B(6Ø,6Ø),D(6Ø,6Ø),UT(6Ø,6Ø),           2
     2          S(6Ø,6Ø),H(6Ø,6Ø),DIS(6Ø,1ØØØ),P(6Ø,1ØØØ),Q(6Ø,1ØØØ),          3
     3          R(6Ø,1ØØØ)                                                      4
      DATA      IV/6Ø*1/,D/36ØØ*Ø.Ø/,S/36ØØ*Ø.Ø/,H/36ØØ*Ø.Ø/                     5
      DATA      N/5/                                                            6
C                                                                               7
      READ(5,5Ø1) DT,NN,FMT                                                     8
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                               9
      READ(5,5Ø2) ((EM(I,J),J=1,N),I=1,N),((EK(I,J),J=1,N),I=1,N),             1Ø
     1           (H(N,J),J=1,N)                                                11
      CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,6Ø)                                            12
      CALL CONG(N,EM,U,A,6Ø)                                                   13
      DO 11Ø J=1,N                                                             14
      D(J,J)=2.Ø*Ø.Ø5/W(1)*W(J)**2/A(J,J)                                      15
  11Ø CONTINUE                                                                 16
      CALL PROM(EM,U,A,N,N,6Ø,6Ø)                                              17
      CALL PROM(A,D,B,N,N,6Ø,6Ø)                                               18
      DO 13Ø I=1,N                                                             19
      DO 12Ø J=1,N                                                             2Ø
      UT(I,J)=U(J,I)                                                           21
  12Ø CONTINUE                                                                 22
  13Ø CONTINUE                                                                 23
      CALL PROM(B,UT,A,N,N,6Ø,6Ø)                                              24
      CALL PROM(A,EM,C,N,N,6Ø,6Ø)                                              25
      CALL MDOF(N,EM,C,EK,IV,6Ø,DT,NN,DDY,DIS,DIS,DIS,1ØØØ)                    26
      CALL PROM(EK,DIS,P,N,NN,6Ø,1ØØØ)                                         27
      DO 14Ø J=1,N                                                             28
      S(N,J)=1.Ø                                                               29
  14Ø CONTINUE                                                                 3Ø
      DO 16Ø I=1,N-1                                                           31
      DO 15Ø J=1,I                                                             32
      S(I,J)=1.Ø                                                               33
      H(I,J)=H(N,J)                                                            34
  15Ø CONTINUE                                                                 35
  16Ø CONTINUE                                                                 36
      CALL PROM(S,P,Q,N,NN,6Ø,1ØØØ)                                            37
      CALL PROM(H,Q,R,N,NN,6Ø,1ØØØ)                                            38
      WRITE(6,6Ø1)                                                             39
      WEIGHT=Ø.Ø                                                               4Ø
      QMAX=Ø.Ø                                                                 41
      RMAX=Ø.Ø                                                                 42
      DO 18Ø I=1,N                                                             43
      L=N+1-I                                                                  44
      WEIGHT=WEIGHT+EM(I,I)*98Ø.Ø                                              45
      DO 17Ø M=1,NN                                                            46
      QMAX=AMAX1(QMAX,ABS(Q(I,M)))                                             47
      RMAX=AMAX1(RMAX,ABS(R(I,M)))                                             48
  17Ø CONTINUE                                                                 49
      COEF=QMAX/WEIGHT                                                         5Ø
      WRITE(6,6Ø2) L,QMAX,COEF,RMAX                                            51
  18Ø CONTINUE                                                                 52
      STOP                                                                     53
C                                                                              54
  5Ø1 FORMAT(//F7.Ø/I5/5A4)                                                    55
  5Ø2 FORMAT(5F1Ø.Ø)                                                           56
  6Ø1 FORMAT(1H1/5(1HØ/)/1HØ,4ØX,5HSTORY,3X,1ØHSHEAR(TON),3X,                  57
     1       1ØHSHEAR COEF,3X,13HMOMENT(TON*M))                                58
  6Ø2 FORMAT(1HØ,4ØX,I3,F13.1,F13.4,F14.Ø)                                     59
      END                                                                      6Ø
```

输入为埃尔森特罗1940南北分量地震动时（最大加速度 为326cm/s²），输出结果如下，其图形为图6.18中的实线。

层数	剪力(t)	剪力系数	弯矩(t·m)
5	70.4	1.3056	246.
4	114.0	1.1634	645.
3	142.7	1.0041	1145.
2	169.8	0.9120	1697.
1	192.1	0.8166	2410.

8.3.5 褶积·反褶积

设系统的输入及输出时程分别为$f(t)$及$g(t)$，系统的脉冲反应函数以$h(t)$表示，则如图3.4.2所示有如下关系：

$$g(t)=f(t)*h(t) \tag{a}$$

$$f(t)=g(t) /\!/ h(t) \tag{b}$$

因而给定输入$f(t)$，并已知脉冲反应函数$h(t)$时，反应$g(t)$可由式(a)通过褶积求得。当$g(t)$由观测得到时，又可由式(b)通过反褶积求得输入$f(t)$。但是由8.3.2节或8.3.4节所介绍的直接积分法求解微分方程来计算反应已没有什么困难，当给定反应来反求输入时，还不如象后面例题8.19所示那样用频率分析更为有效。所以作为时域分析之一的式(a)或式(b)的计算几乎没有实用价值。但为了把图3.42所示的计算体系完整地交代到底，这里只讲述一下褶积与反褶积的数值计算原则。

a. 褶积

式(a)所示函数$f(t)$与$g(t)$的褶积可由式（3.12）表示如下

$$g(t)=\int_0^t f(t)h(t-\tau)d\tau \tag{c}$$

现将时程$f(t)$及$h(t)$用时间间隔为Δt的离散值表示

$$\left.\begin{aligned} f_m&=f[(m-1)\Delta t] \\ h_m&=h[(m-1)\Delta t] \end{aligned}\right\} \quad m=1,2\cdots N$$

$g(t)$也一样有

$$g_m=g[(m-1)\Delta t] \qquad m=1,2\cdots N$$

则式(c)的褶积为

$$g_m=\sum_{k=1}^{m} f_k\cdot h_{m-k+1}\Delta t \qquad m=1,2\cdots N \tag{8.8}$$

式（8.8）用矩阵表示为

$$\{g\}=[h]\{f\} \tag{8.9}$$

式中

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\\ \vdots\\ f_N \end{Bmatrix} \quad \{g\}=\begin{Bmatrix} g_1\\ g_2\\ g_3\\ \vdots\\ g_N \end{Bmatrix} \quad [h]=\begin{bmatrix} h_1 & & & \\ h_2 & h_1 & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ h_N & \cdots & \cdots & h_1 \end{bmatrix}\Delta t \tag{8.10}$$

矩阵$[h]$如式（8.10）所示，$h_m(m=1,2\cdots N)$由每行主对角线向左逆向排列成下三角矩阵。

b. 反褶积

由输出的观测值推算输入的反褶积，理论上由式（8.9）

$$\{f\}=[h]^{-1}\{g\} \tag{d}$$

求得，但是只要$g(t)$有一点误差，由式(d)推算的$\{f\}$就常常极不稳定。因此这时与其用式(d)直接求得，不如用最小二乘法求平滑化的近似解。

一般多元函数$F(x_1,x_2\cdots x_n)$的无条件极值由解下列联立方程求得：

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0\,,\quad \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial x_N}=0$$

但是如果N个变量中存在联系条件

$$\phi_i(x_1,x_2\cdots x_N)=0 \qquad i=1\,,2\cdots n \qquad n<N \tag{e}$$

则求函数$F(x_1,x_2\cdots x_N)$的条件极值要引入待定乘子$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$，产生新的函数

$$G=F(x_1,x_2\cdots x_n)-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi_i(x_1,x_2\cdots x_N) \tag{f}$$

对函数$G(x_1,x_2\cdots x_N)$的无条件极值由

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=0\,,\quad \frac{\partial G}{\partial x_2}=0,\cdots\frac{\partial G}{\partial x_N}=0 \tag{g}$$

求得。式(g)有N个方程，式(e)有n个方程，故可确定N个x，n个λ的值。上面的λ称为拉格朗日乘子。由式（5.14），式(g)可表为

$$\frac{\partial G}{\partial\{x\}}=\{0\} \tag{h}$$

这时，反应$\{g\}$中到式（8.10）第2式所示g_N为止的各分量有值，其后为n个零。而且第3式的$[h]$也扩展为（$N+n$）次的正下三角形矩阵，成为下列形式

$$\{g\}=\begin{Bmatrix} g_1\\ g_2\\ g_3\\ \vdots\\ g_N\\ \hline 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{g\}_N\\ \{0\}\end{Bmatrix}\quad [h]=\left[\begin{array}{ccccc|cccc} h_1 & & & & & & & & \\ h_2 & h_1 & & & & & & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \\ h_N & \cdots & \cdots & \cdots & h_1 & & & & \\ \hline 0 & h_N & \cdots & \cdots & h_2 & h_1 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_n & \cdots & \cdots & h_1 \end{array}\right]\Delta t$$

$$=\begin{bmatrix}[h]_{NN} & [0]\\ [h]_{nN} & [h]_{nn}\end{bmatrix}$$

所求的输入$\{f\}$也在式（8.10）第1式后面添上n个分量，表为

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_N\\ \hline f_{N+1}\\ f_{N+2}\\ \vdots\\ f_{N+n}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{f\}_N\\ \{f\}_n\end{Bmatrix} \tag{j}$$

实际输入也只有N个分量，则f_i($i=N+1\,,N+2\cdots N+n$)均为零，即有

$$\{f\}_n=\{0\} \tag{k}$$

式(k)表示变量f_i($i=1\,,2\cdots N+n$）之间的存在条件，即相当于式（e）。

用式(i)及(j)所表示的$\{f\}$、$\{g\}$与$\{h\}$只能近似满足关系式(8.9)。设每个时刻的误差为ε_i($i=1,2\cdots N+n$)，则$\{\varepsilon\}=\{g\}-[h]\{f\}$，使误差达到最小的目标函数，也就是误差的平方和为

$$F=\sum_{i=1}^{N+n}\varepsilon^2=\{\varepsilon\}^T\{\varepsilon\}=(\{g\}-[h]\{f\})^T(\{g\}-[h]\{f\})$$

$$=(\{g\}^T-\{f\}^T[h]^T)(\{g\}-[h]\{f\}) \tag{l}$$

引入如下形式的（$N+n$）阶方阵和矢量：

$$[E]=[E]^T=\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [I]\end{bmatrix} \qquad \{L\}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{\lambda\}\end{Bmatrix} \tag{m}$$

式中$[I]$为单位矩阵，$[\lambda]$为以拉格朗日乘子λ_i（$i=1,2\cdots n$）为元素的n阶矢量。运用式(m)的$[E]$和式(j)的$\{f\}$，可将式(k)的条件表为$[E]^T\{f\}=\{0\}$。因而式(f)中的函数G可用式(l)及式(m)的矢量$\{L\}$表为

$$G=(\{g\}^T-\{f\}^T[h]^T)(\{g\}-[h]\{f\})-2\{L\}^T[E]^T\{f\}$$
$$=\{g\}^T\{g\}-\{f\}^T[h]^T\{g\}-\{g\}^T[h]\{f\}+\{f\}^T[h]^T[h]\{f\}-2\{L\}^T\times[E]^T\{f\} \tag{n}$$

再用式(h)即$\partial G/\partial\{f\}=\{0\}$，对式（n）逐项进行偏微分$\partial G/\partial\{f\}$，参照式（5.42）及（5.44）有

$$\partial(\{g\}^T\{g\})/\partial\{f\}=\{0\} \qquad \partial(\{f\}^T[h]^T\{g\})/\partial\{f\}=[h]^T\{g\}$$
$$\partial(\{g\}^T[h]\{f\})/\partial\{f\}=[h]^T\{g\} \qquad \partial(\{f\}^T[h]^T[h]\{f\})/\partial\{f\}=2[h]^T\times[h]\{f\}$$
$$\partial(\{L\}^T[E]^T\{f\})/\partial\{f\}=[E]\{L\}$$

最后得

$$[h]^T[h]\{f\}=[h]^T\{g\}+[E]\{L\}$$

由式(i)、(j)和(k)，上式可写成

$$\begin{bmatrix}[h]_{NN}^T[h]_{NN}+[h]_{nN}^T[h]_{nN} & [h]_{nN}^T[h]_{nn}\\ [h]_{nn}^T[h]_{nN} & [h]_{nn}^T[h]_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{f\}_N\\ \{0\}\end{Bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}[h]_{NN}^T & [h]_{nN}^T\\ [0] & [h]_{nn}^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{g\}_N\\ \{0\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [I]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{\lambda\}\end{Bmatrix}$$

展开后第一行为$([h]_{NN}^T[h]_{NN}+[h]_{nN}^T[h]_{nN})\{f\}_N=[h]_{NN}^T\{g\}_N$，也就是$\{f\}_N=([h]_{NN}^T[h]_{NN}+[h]_{nN}^T[h]_{nN})^{-1}[h]_{NN}^T\{g\}_N$，将$\{f\}_N$及$\{g\}_N$用式（8.10）所示的原记号$\{f\}$、$\{g\}$表示，则成为

$$\{f\}=([h]_{NN}^T[h]_{NN}+[h]_{nN}^T[h]_{nN})^{-1}[h]_{NN}^T\cdot\{g\} \tag{8.11}$$

根根这个公式可求得离散形式时程的反褶积。

8.4 频 率 分 析

8.4.1 快速富里哀变换

离散数据x_m($m=0,1,2\cdots N-1$)的富里哀变换及其逆变换由式(3.161)及式(3.160)给出

$$C_k=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_m e^{-i(2\pi km/N)} \qquad k=0,1,2\cdots N-1$$
$$x_m=\sum_{k=0}^{N-1}C_k e^{+i(2\pi km/N)} \qquad m=0,1,2\cdots N-1 \qquad (8.12)$$

J.W.Cooley及J.W.Tukey开发成功一种极为快速地计算这个变换的方法，称为库利－图基（Cooley-Tukey）法或快速富里哀变换(简称FFT)。

下面的程序*FAST*（Fast Fourier Tranform)是作者参考N.M.Brenner的程序[19]改编的快速富里哀变换程序。使用时的注意事项在下面叙述，方法的原理可参考Brenner的原著[19]或作者的另一著作[17]。

（i）本程序可用于计算富里哀变换及逆变换。留心式（8.12）的第1式与第2式可以发现，两者只是指数的符号不同，而形式上完全一样，因而变量取$IDN=\mp 1$可分别求富里哀变换及逆变换。

(ii) 所给定的数据x_m或C_k都必须是以相等的时间间隔或频率间隔给出的数据。

(iii) 数据总数必须是2的整数次幂，不满足的要在主程序中将数据后面补零，使总数为2的整数次幂。

(iv) 可以将输入数据与复数型的变换值用同一个数组处理，由于能直接对复数型数据作变换，通常应给出复数型的数据。因此对实数数据作变换时，在主程序中要将其变成虚部全是0的复数型数据。反过来给定复数的富里哀变换系数$C_k(k=0,1,2\cdots N/2)$，而逆变换$x_m(m=0,1,2\cdots N-1)$为实数时，为满足条件式（3.163），变换值的后半部应加上共轭复数$C_{N-k}=C_k^*(k=1,2\cdots N/2-1)$。

（v）时程数据x_m的时间间隔为Δt(s)时，富里哀变换值C_k在频率间隔$\Delta\nu=1/(N\cdot\Delta t)$(Hz)上给出。同样变换值数据的频率间隔为$\Delta\nu$时，逆变换值的时间间隔为$\Delta t=1/(N\cdot\Delta\nu)$。

(vi) 在进行富里哀变换时，所得结果是变换值的N倍，因而从该子程序返回时，要在主程序中再除以N。但用本程序计算逆变换时就不要作这种处理，计算结果本身就是逆变换值，这一点只要注意到式（8.12）的两式中有无系数$1/N$就可知道。

FAST（快速富里哀变换）

目的

对给定等间隔复数型数据作富里哀变换或逆变换。

使用方法

（1）连接方法

CALL FAST(N,X,ND,IND)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
N	I	数据或变换值的总数	不　变
X	C 一维数组(ND)	等间隔复数数据	富里哀变换的N倍

19) Brenner, N.M.: Three Fortran Programs That Perform the Cooley-Tukey Fourier Transform, Massachusetts Institute of Technology, July 1967.

(续表)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序反回时的内容
ND	I	主程序中*X*的维数	不　变
IND	I	富里哀变换时　$IND=-1$ 富里哀逆变换时　$IND=1$	不　变

（2）注意事项

i）N必须是2的整数次幂。

ii）富里哀变换（$IND=-1$）时，变换值被扩大了N倍。

（3）必要的子程序及函数子程序

无

程序表

```
C   * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *              FAST   1
C      SUBROUTINE FOR FAST FOURIER TRANSFORM                      FAST   2
C   * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *              FAST   3
C                                                              FAST   4
C                           CODED BY Y.OHSAKI                  FAST   5
C                                                              FAST   6
C      PURPOSE                                                 FAST   7
C        TO PERFORM FAST FOURIER OR INVERSE FOURIER TRANSFORM OF FAST   8
C        A SERIES OF EQUI-SPACED DATA                          FAST   9
C      USAGE                                                   FAST 1Ø
C        CALL FAST(N,X,ND,IND)                                 FAST 11
C                                                              FAST 12
C      DESCRIPTION OF PARAMETERS                               FAST 13
C        N      - TOTAL NUMBER OF COMPLEX DATA AND TRANSFORMED VALUES FAST 14
C        X(ND)  - EQUI-SPACED COMPLEX DATA/TRANSFORMED VALUES AT  FAST 15
C                 CALL/RETURN                                  FAST 16
C        ND     - DIMENSION OF X IN CALLING PROGRAM            FAST 17
C        IND    - IND=-1 FOR FOURIER TRANSFORM                 FAST 18
C                     +1 FOR INVERSE FOURIER TRANSFORM         FAST 19
C                                                              FAST 2Ø
C      REMARKS                                                 FAST 21
C        (1) N MUST BE EQUAL TO POWERS OF 2                    FAST 22
C        (2) WHEN IND=-1, TRANSFORMED VALUES ARE MULTIPLIED BY N FAST 23
C        (3) EXAMPLE OF CALLING                                FAST 24
C                 COMPLEX    A(1Ø24)                           FAST 25
C                 DIMENSION DATA(1Ø24)                         FAST 26
C                 DATA       NN/1Ø24/                          FAST 27
C                 DO 1 M=1,NN                                  FAST 28
C                 A(M)=CMPLX(DATA(M),Ø.Ø)                      FAST 29
C               1 CONTINUE                                     FAST 3Ø
C                 CALL FAST(NN,A,1Ø24,-1)                      FAST 31
C                                                              FAST 32
C      REFERENCE                                               FAST 33
C        N.M.BRENNER/ THREE FORTRAN PROGRAMS THAT PERFORM THE COOLEY- FAST 34
C        TUKEY FOURIER TRANSFORM / MIT JULY 1967               FAST 35
C                                                              FAST 36
C      SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED           FAST 37
C        NONE                                                  FAST 38
C                                                              FAST 39
       SUBROUTINE FAST(N,X,ND,IND)                             FAST 4Ø
C                                                              FAST 41
       COMPLEX X(ND),TEMP,THETA                                FAST 42
C                                                              FAST 43
       J=1                                                     FAST 44
       DO 14Ø I=1,N                                            FAST 45
       IF(I.GE.J) GO TO 11Ø                                    FAST 46
       TEMP=X(J)                                               FAST 47
       X(J)=X(I)                                               FAST 48
       X(I)=TEMP                                               FAST 49
  11Ø  M=N/2                                                   FAST 5Ø
  12Ø  IF(J.LE.M) GO TO 13Ø                                    FAST 51
       J=J-M                                                   FAST 52
       M=M/2                                                   FAST 53
       IF(M.GE.2) GO TO 12Ø                                    FAST 54
```

```
130 J=J+M                                                          FAST 55
140 CONTINUE                                                       FAST 56
    KMAX=1                                                         FAST 57
150 IF(KMAX.GE.N) RETURN                                           FAST 58
    ISTEP=KMAX*2                                                   FAST 59
    DO 170 K=1,KMAX                                                FAST 60
    THETA=CMPLX(0.0,3.141593*FLOAT(IND*(K-1))/FLOAT(KMAX))        FAST 61
    DO 160 I=K,N,ISTEP                                             FAST 62
    J=I+KMAX                                                       FAST 63
    TEMP=X(J)*CEXP(THETA)                                          FAST 64
    X(J)=X(I)-TEMP                                                 FAST 65
    X(I)=X(I)+TEMP                                                 FAST 66
160 CONTINUE                                                       FAST 67
170 CONTINUE                                                       FAST 68
    KMAX=ISTEP                                                     FAST 69
    GO TO 150                                                      FAST 70
    END                                                            FAST 71
```

【例题8.16】 编出读入加速度时程数据并求富里哀振幅谱的主程序。

〔解〕 程序如下：

```
      COMPLEX    C(1024)                                           1
      DIMENSION NAME(12),FMT(5),DDY(1000),F(513)                   2
C                                                                  3
      READ(5,501) NAME,DT,NN,FMT                                   4
      READ(5,FMT) (DDY(M),M=1,NN)                                  5
      DO 110 M=1,NN                                                6
      C(M)=CMPLX(DDY(M),0.0)                                       7
  110 CONTINUE                                                     8
      NT=2                                                         9
  120 IF(NT.GT.NN) GO TO 130                                       10
      NT=NT*2                                                      11
      GO TO 120                                                    12
  130 DO 140 M=NN+1,NT                                             13
      C(M)=(0.0,0.0)                                               14
  140 CONTINUE                                                     15
      NFOLD=NT/2+1                                                 16
      CALL FAST(NT,C,1024,-1)                                      17
      DO 150 K=1,NFOLD                                             18
      F(K)=CABS(C(K))*DT                                           19
  150 CONTINUE                                                     20
      STOP                                                         21
C                                                                  22
  501 FORMAT(12A4//F7.0/I5/5A4)                                    23
      END                                                          24
```

计算结果所得的富里哀振幅谱放在数组 F 中。输入加速度时程为埃尔森特罗1940南北分量时，图形如图3.34所示。

8.4.2 频率响应函数

本程序*FRES* (Freguency Response Function) 用于计算表3.3所示的 9 种频率响应函数。由变量*IND*指定计算的类型。内容不过是单纯的复数运算。按此子程序可求得从 $\omega=0$ 到 $\omega=(N-1)\Delta\omega$ 的 N 个频率响应函数 $H(\omega)$ 的值。

FRES (频率响应函数)

目的

计算单质点有阻尼系统在谐和地面运动作用下的频率响应函数。

使用方法

（1）连接方法

CALL FRES(WB,DAMP,DW,N,H,ND,IND)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程序返回时的内容
WB	R	系统无阻尼固有圆频率(单位：rad/s)	不　变
DAMP	R	系统阻尼比(无量纲小数)	不　变

(续表)

变　量	类　型	调用子程序时的内容	从子程返反回时的内容
DW	R	频率响应函数的频率间隔(单位：rad/s)	不　变
N	I	频率响应函数的数据总数	不　变
H	C 一维数组(*ND*)	不必赋值	频率响应函数
ND	I	主程序中*H*的维数	不　变
IND	I	频率响应函数种类，参照下表	不　变

IND		响应		
		绝对加速度	相对速度	相对位移
地面运动	加速度	11	12	13
	速　度	21	22	23
	位　移	31	32	33

（2）必要的子程序及函数子程序

无

程序表

```
C   * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *                  FRES   1
C     SUBROUTINE FOR FREQUENCY RESPONSE FUNCTION                         FRES   2
C   * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *                  FRES   3
C                                                                        FRES   4
C                                  CODED BY Y.OHSAKI                     FRES   5
C                                                                        FRES   6
C     PURPOSE                                                            FRES   7
C       TO COMPUTE FREQUENCY RESPONSE FUNCTION BETWEEN RESPONSES OF      FRES   8
C       DAMPED, ONE-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM AND HARMONIC GROUND         FRES   9
C       MOTIONS                                                          FRES  10
C                                                                        FRES  11
C     USAGE                                                              FRES  12
C       CALL FRES(WB,DAMP,DW,N,H,ND,IND)                                 FRES  13
C                                                                        FRES  14
C     DESCRIPTION OF PARAMETERS                                          FRES  15
C       WB     - NATURAL CIRCULAR FREQUENCY OF SYSTEM IN RAD/SEC         FRES  16
C       DAMP   - DAMPING FACTOR OF SYSTEM IN DECIMAL FRACTION            FRES  17
C       DW     - FREQUENCY INCREMENT IN FREQUENCY RESPONSE FUNCTION      FRES  18
C                IN RAD/SEC                                              FRES  19
C       N      - TOTAL NUMBER OF DATA IN FREQUENCY RESPONSE FUNCTION     FRES  20
C       H(ND)  - FREQUENCY RESPONSE FUNCTION                             FRES  21
C       ND     - DIMENSION OF H IN CALLING PROGRAM                       FRES  22
C       IND    - SEE FOLLOWING TABLE                                     FRES  23
C    ------------------------------------------------------------------- FRES  24
C    I                        I                RESPONSE                I FRES  25
C    I           IND          I----------------------------------------I FRES  26
C    I                        I  ABSOLUTE    I RELATIVE I   RELATIVE   I FRES  27
C    I                        I ACCELERATION I VELOCITY I DISPLACEMENT I FRES  28
C    I------------------------I--------------I----------I--------------I FRES  29
C    I        I ACCELERATION  I      11      I    12    I      13      I FRES  30
C    I MOTION I---------------I--------------I----------I--------------I FRES  31
C    I   OF   I   VELOCITY    I      21      I    22    I      23      I FRES  32
C    I GROUND I---------------I--------------I----------I--------------I FRES  33
C    I        I DISPLACEMENT  I      31      I    32    I      33      I FRES  34
C    ------------------------------------------------------------------- FRES  35
C                                                                        FRES  36
C     SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED                      FRES  37
C       NONE                                                             FRES  38
C                                                                        FRES  39
      SUBROUTINE FRES(WB,DAMP,DW,N,H,ND,IND)                             FRES  40
C                                                                        FRES  41
      COMPLEX H(ND),WIMAG                                                FRES  42
```

```
C                                                          FRES 43
      I=IND/1Ø                                             FRES 44
      J=MOD(IND,1Ø)                                        FRES 45
      W=Ø.Ø                                                FRES 46
      DO 14Ø K=1,N                                         FRES 47
      WIMAG=CMPLX(Ø.Ø,W)                                   FRES 48
      H(K)=-1.Ø/(WB**2-W**2+2.Ø*DAMP*WB*WIMAG)             FRES 49
      IF(J.EQ.3) GO TO 11Ø                                 FRES 5Ø
      H(K)=H(K)*WIMAG                                      FRES 51
      IF(J.EQ.2) GO TO 11Ø                                 FRES 52
      H(K)=H(K)*WIMAG+1.Ø                                  FRES 53
  11Ø IF(I.EQ.1) GO TO 13Ø                                 FRES 54
      DO 12Ø L=1,I-1                                       FRES 55
      H(K)=H(K)*WIMAG                                      FRES 56
  12Ø CONTINUE                                             FRES 57
  13Ø W=W+DW                                               FRES 58
  14Ø CONTINUE                                             FRES 59
      RETURN                                               FRES 6Ø
      END                                                  FRES 61
```

【例题8.17】 编出例题8.8中用频率响应函数求绝对加速度反应的主程序。

〔解〕 程序如下，与图3.5(a)相同的结果放在数组ACC中。

```
      COMPLEX   C(1Ø24),H(513)                                  1
      DIMENSION FMT(5),DDY(8ØØ),ACC(8ØØ)                        2
      DATA      NT/1Ø24/,C/1Ø24*(Ø.Ø,Ø.Ø)/                      3
C                                                               4
      READ(5,5Ø1) DT,NN,FMT                                     5
      READ(5,FMT) (DDY(M),M-1,NN)                               6
      DO 11Ø M=1,NN                                             7
      C(M)=CMPLX(DDY(M)/FLOAT(NT),Ø.Ø)                          8
  11Ø CONTINUE                                                  9
      CALL FAST(NT,C,1Ø24,-1)                                  1Ø
      NFOLD=NT/2+1                                             11
      WB=6.283185/Ø.3                                          12
      DW=6.283185/(FLOAT(NT)*DT)                               13
      CALL FRES(WB,Ø.Ø5,DW,NFOLD,H,513,11)                     14
      C(1)=C(1)*H(1)                                           15
      DO 12Ø K=2,NFOLD-1                                       16
      C(K)=C(K)*H(K)                                           17
      C(NT+2-K)=CONJG(C(K))                                    18
  12Ø CONTINUE                                                 19
      C(NFOLD)=C(NFOLD)*H(NFOLD)                               2Ø
      CALL FAST(NT,C,1Ø24,+1)                                  21
      DO 13Ø M=1,NN                                            22
      ACC(M)=REAL(C(M))                                        23
  13Ø CONTINUE                                                 24
      STOP                                                     25
C                                                              26
  5Ø1 FORMAT(//F7.Ø/I5/5A4)                                    27
      END                                                      28
```

【例题8.18】 给定地面运动时程，编出求例题8.4系 统反 应的主程序。地面运动时程按8.1节中的格式输入。

〔解〕 设与例题8.14一样输入系统的质量及刚度矩阵，程序如下：

```
      COMPLEX   C(1Ø24),H(513)                                                 1
      DIMENSION FMT(5),DY(1ØØØ),EM(6Ø,6Ø),EK(6Ø,6Ø),DAMP(6Ø),W(6Ø),           2
     1          U(6Ø,6Ø),A(6Ø,6Ø),B(6Ø,6Ø),RES(6Ø,1ØØØ,3)                      3
      DATA      RES/18ØØØØ*Ø.Ø/                                                4
      DATA      N/5/,NMODE/5/,DAMP/5*Ø.Ø5,55*Ø.Ø/                              5
C                                                                              6
      READ(5,5Ø1) DT,NN,FMT                                                    7
      READ(5,FMT) (DY(M),M=I,NN)                                               8
      READ(5,5Ø2) ((EM(I,J),J=1,N),I=1,N),((EK(I,J),J=1,N),I=1,N)              9
      CALL MOCH(N,EM,EK,W,U,A,B,6Ø)                                           1Ø
      NT=2                                                                    11
  11Ø IF(NT.GT.NN) GO TO 12Ø                                                  12
      NT=NT*2                                                                 13
      GO TO 11Ø                                                               14
  12Ø NFOLD=NT/2+1                                                            15
      DW=6.283185/FLOAT(NT)/DT                                                16
      DO 19Ø L=1,3                                                            17
      IND=2Ø+L                                                                18
```

```
      DO 18Ø J=1,NMODE                                              19
      CALL FRES(W(J),DAMP(J),DW,NFOLD,H,513,IND)                    2Ø
      DO 13Ø M=1,NN                                                 21
      C(M)=CMPLX(DY(M)/FLOAT(NT),Ø.Ø)                               22
  13Ø CONTINUE                                                      23
      DO 14Ø M=NN+1,NT                                              24
      C(M)=(Ø.Ø,Ø.Ø)                                                25
  14Ø CONTINUE                                                      26
      CALL FAST(NT,C,1Ø24,-1)                                       27
      C(1)=C(1)*H(1)                                                28
      DO 15Ø K=2,NFOLD-1                                            29
      C(K)=C(K)*H(K)                                                3Ø
      C(NT+2-K)=CONJG(C(K))                                         31
  15Ø CONTINUE                                                      32
      C(NFOLD)=C(NFOLD)*H(NFOLD)                                    33
      CALL FAST(NT,C,1Ø24,+1)                                       34
      DO 17Ø I=1,N                                                  35
      DO 16Ø M=1,NN                                                 36
      RES(I,M,L)=RES(I,M,L)+U(I,J)*REAL(C(M))                       37
  16Ø CONTINUE                                                      38
  17Ø CONTINUE                                                      39
  18Ø CONTINUE                                                      4Ø
  19Ø CONTINUE                                                      41
      STOP                                                          42
C                                                                   43
  5Ø1 FORMAT(//F7.Ø/I5/5A4)                                         44
  5Ø2 FORMAT(5F1Ø.Ø)                                                45
      END                                                           46
```

计算结果放在三维数组RES中，第 1 下标表示由上层数起的质点编号，各质点的绝对加速度、相对速度及相对位移反应分别放在数组的第 3 下标为 1， 2 及 3 的部分。

【例题8.19】 在上例中屋顶（质点m_5）处测定地震时的加速度，其时程以时间间隔为0.01 s，总数为800个数据离散化，以格式10F8.2输入，写出求地面加速度时程的主程序。

〔解〕 程序如下，地面加速度时程放在数组DDY中。

```
      COMPLEX   C(1Ø24),H(513),HJ(513)                              1
      DIMENSION ACC(8ØØ),EM(5,5),EK(5,5),W(5),U(5,5),A(5,5),        2
     1          B(5,5),DDY(8ØØ)                                     3
      DATA      C/1Ø24*(Ø.Ø,Ø.Ø)/,H/513*(Ø.Ø,Ø.Ø)/                  4
C                                                                   5
      READ(5,5Ø1) (ACC(M),M=1,8ØØ)                                  6
      READ(5,5Ø2) ((EM(I,J),J=1,5),I=1,5),((EK(I,J),J=1,5),I=1,5)   7
      CALL MOCH(5,EM,EK,W,U,A,B,5)                                  8
      DO 11Ø M=1,8ØØ                                                9
      C(M)=CMPLX(ACC(M)/1Ø24.Ø,Ø.Ø)                                 1Ø
  11Ø CONTINUE                                                      11
      CALL FAST(1Ø24,C,1Ø24,-1)                                     12
      DW=6.283185/(1Ø24.Ø*Ø.Ø1)                                     13
      DO 13Ø J=1,5                                                  14
      CALL FRES(W(J),Ø.Ø5,DW,513,HJ,513,11)                         15
      DO 12Ø K=1,513                                                16
      H(K)=H(K)+U(1,J)*HJ(K)                                        17
  12Ø CONTINUE                                                      18
  13Ø CONTINUE                                                      19
      C(1)=C(1)/H(1)                                                2Ø
      DO 14Ø K=2,512                                                21
      C(K)=C(K)/H(K)                                                22
      C(1Ø26-K)=CONJG(C(K))                                         23
  14Ø CONTINUE                                                      24
      C(513)=C(513)/H(513)                                          25
      CALL FAST(1Ø24,C,1Ø24,+1)                                     26
      DO 15Ø M=1,8ØØ                                                27
      DDY(M)=REAL(C(M))                                             28
  15Ø CONTINUE                                                      29
      STOP                                                          3Ø
C                                                                   31
  5Ø1 FORMAT(1ØF8.2)                                                32
  5Ø2 FORMAT(5F1Ø.Ø)                                                33
      END                                                           34
```

8.5 实 验 分 析

用人为的方法使实际结构物产生尽可能简单的振动并加以测定，由此得到有关结构特性

的数据，这种试验称为振动试验。振动试验主要分为：

（i）自由振动试验

（ii）强迫振动试验

此外，大地总是处于振幅为微米级的微小振动中，称为脉动。在地面脉动激发下，结构物本身也以与其固有频率相近的频率作微小振动。通过测定结构物的这种微小振动，也能获得有关振动特性的许多有益资料[20]。

但是这类试验中，虽然在程度上因情况而异，却受结构物设置场地的地基振动特性影响，难以得到纯粹的结构物振动特性。

将结构物或其一部分模型放在振动台上，施加任意的激振力来观测模型的反应，称为振动台试验，以往仅能作比较小型的模型体试验，现在正在修建可对实际大小或接近实际大小的结构物加载激振的超大型振动台，可以期待不久将可获得有用的资料[21]。

8.5.1 自由振动试验

使结构物顶部产生初始位移，然后突然释放，结构物就作有阻尼自由振动。例如用钢丝绳拉，使之产生初始位移，然后突然切断；或在建筑物顶部刚心处设置火箭筒，利用喷气的反力作用使结构物振动[22]。

使结构物顶部产生初始位移后，因为建筑物主要以一阶振型振动，所以把它看成是单质点有阻尼系统，当初始位移为$x(0)=x_0$，初始速度为$\dot{x}(0)=0$时，自由振动的时程由式(2.54)所示为

$$x=\frac{x_0}{\sqrt{1-h^2}}e^{-h\omega t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\omega t+\phi)$$

图形如图2.18所示。实测时可以得到这种形状的位移记录。所得记录相邻峰值之间的时间间隔如图所示为有阻尼固有周期$T_d=(2\pi/\omega)/\sqrt{1-h^2}$，如果$h^2\doteqdot 0$，则这个时间间隔给出系统一阶振型的无阻尼固有周期$T$。

实际上较好的办法不是只取两个相邻峰值的时间间隔，而是读取n个峰值间的时间间隔求平均值

$$\overline{T}=(t_{m+n}-t_m)/n \qquad (a)$$

以同样的方法求得若干个平均值，然后再作平均。

设相隔n个周期的峰值为x_m, x_{m+n}，由式(2.60)有关系$\ln(x_m/x_{m+n})/n=2\pi h/\sqrt{1-h^2}$，当$h^2\doteqdot 0$时可通过

$$h=\frac{1}{2\pi n}\ln(x_m/x_{m+n}) \qquad (b)$$

求得一阶振型的阻尼比。最好也重复多次求其平均值。

【例题8.20】 由自由振动实验得图8.3的记录，求固有周期及阻尼比。

〔解〕 由图读取各峰值振幅x_m，由式（a）及（b）求得固有周期及阻尼比如下表：

20）主要参见金井清博士的许多文献。

21）Ohsaki, Y., On Aseismic Proving Test Project Using A Large-Scale Vibration Table, U.S.Japan Cooperative Research Program Utilizing Large-Scale Testing Facilities, Tokyo, September 1977.

22）Ohsaki, Y., The Use of Jet Reaction for Dynamic Test of Buildings, Trans. Architectural Institute of Japan, No142, September 1967.

m	t_m	t_{m+5}	$\bar{T}(s)$	x_m	x_{m+5}	h
1	0.40	2.47	0.414	10.3	4.5	0.0264
2	0.80	2.89	0.418	8.9	4.1	247
3	1.22	3.29	0.414	7.5	3.5	242
4	1.63	3.68	0.410	6.0	2.9	231
5	2.05	4.08	0.408	5.0	2.4	234
平　均			0.412			0.0244

8.5.2 强迫振动试验

强迫振动试验按激振方式分类有起振机激振，以及用振子作同步激振等方法[23,24]。这些方法都可以使结构物按任意频率作谐和振动。在附近地基用炸药爆炸，或进行地震观测等都是广义的强迫振动试验，但观测记录的波形复杂，分析比较困难。本节专门讨论用起振机激振的振动试验。

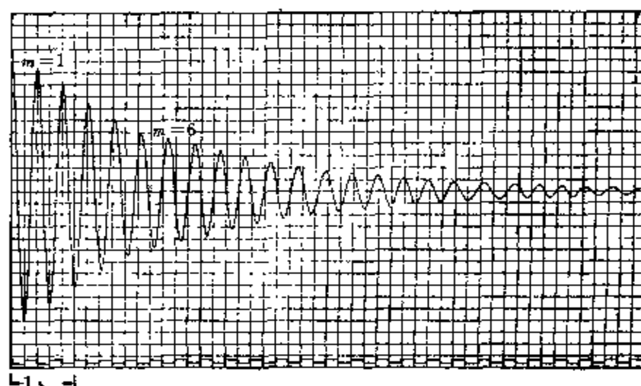


图8.3　自由振动试验记录

a．起振机

如图8.4(a)所示，质量为m_0，回转半径为r的重锤，以角速度ω转动，则沿半径方向对回转轴的离心力为$m_0r\omega^2$。这个离心力是具有力的量纲的转动矢量，如2.2.5节所述可用复数$P=m_0r\omega^2e^{i\omega t}$表示。

今用两个重锤如图8.4(b)所示那样组合成绕垂直轴的转动机构，两锤相对位置如图，以同一角速度ω逆向转动，则起振力为

$$P=m_0r\omega^2e^{i\omega t}+m_0r\omega^2e^{-i\omega t}$$
$$=2m_0r\omega^2\cos\omega t$$

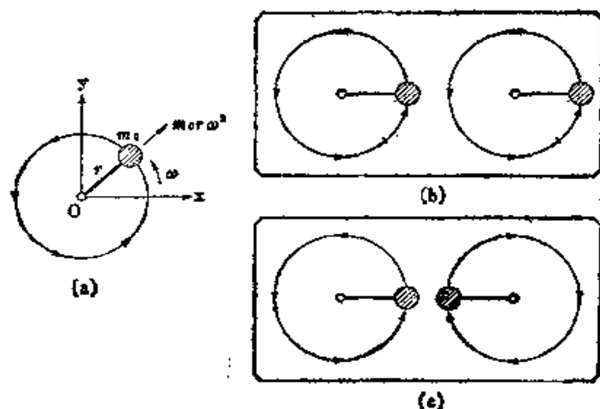


图8.4　起振机原理

它只引起x方向作用的激振力。如果两锤相对位置如图(c)所示，还是逆向转动，则只引起y方向的激振力。如果绕水平轴转动，则可能形成水平向或上下方向的激振作用。

起振机原理如上所述。但实际起振机多如图8.5或8.6所示，两个转动机构上下重迭，设计成绕相同的轴沿相反方向转动。还有的用三个以上的重锤。对转轴的偏心质量总和用m_0表示，称为偏心质量。由转动中心到偏心质量重心的距离称为转动半径。两者之积m_0r称为偏心矩。通常起振机偏心矩可以调整，转动速度ω也可以连续改变，激振力振幅用$P_0=m_0r\omega^2$表

23) 武藤清，太田外気晴，笹尾光，足立憲彦：霞ヶ関超高層ビルの振动実験（その1：实验结果），日本建筑学会大会学術講演梗概集，1968年。

24) 武藤清，太田外気晴，宫下丘：同上（その2：振子振动の理论的検討），日本建筑学会関東支部第39回学术研究発表会，1968年。

示。目前单台的最大起振力为$P_{max}=150$ t，还可用好几台同步转动，所以可以对结构物施加强大的激振力。



图8.5 起振机



图8.6 起振机

b. 起振机试验方法

以固定的角速度持续转动偏心质量的试验叫稳态试验。起动后按一定比例逐步增加转速，达到某个转速后又按一定比例减速直到停止状态为止，这种试验法叫扫描试验。进行扫描试验时，每当起振机的转速与结构物各振型的固有频率一致就在各层产生很大的反应，得到如图8.7所示的共振曲线。实际上大多数采取每隔适当的频率进行稳态试验，完成各种测定后，再作下一个频率的稳态试验，即分段扫描试验。在共振曲线峰值附近，频率的划分细密些为好。

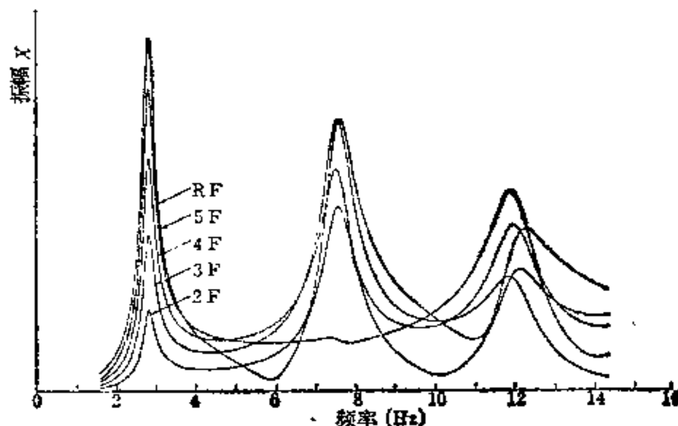


图8.7 起振机试验的共振曲线

如果偶而将起振机设置在振型的节点上，则至少在理论上不会产生这个振型的振动。为避免这一点，尽量使各振型受到同样大小的激励，通常将起振机设置在楼板上。

c. 单质点系的起振机试验

将起振力为$m_0r\omega^2\sin\omega t$的起振机安装在单质点系上时，运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=m_0r\omega^2\sin\omega t \tag{8.13}$$

上式不过是式(2.71)中的$P_0=m_0r\omega^2$而已。在分段扫描试验中反复进行稳态试验，则式(2.74)中只需考虑特解。由式(2.76)得反应位移的振幅为$X=(m_0r\omega^2/m)/\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega^2)^2+(2h\bar{\omega}\omega)^2}$，或用频率表示为

$$X=\frac{(m_0r/m)\nu^2}{\sqrt{(\bar{\nu}^2-\nu^2)^2+(2h\bar{\nu}\nu)^2}} \tag{8.14}$$

振幅X相对于频率的变化关系如图8.8，实际上由位移计实测反应位移并将其结果作图，也可以得到这样的共振曲线。

如图2.25所示，系统的固有频率$\bar{\nu}$，即引起共振振幅的频率在共振曲线峰值附近。但实际上难以精确读出共振频率，所以由实测共振曲线求固有频率时，用下面的方法较好。

由图8.8的原点引直线，直线方程为

$$X = C\nu \qquad C\text{：常数} \tag{a}$$

求出直线与共振曲线的交点，即式（8.14）和式（a）相等所得方程 $(m_0r/m)\nu^2/\sqrt{(\bar{\nu}^2-\nu^2)^2+(2h\bar{\nu}\nu)^2}=C\nu$的根，将此式改写为

$$\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^4-[2-4h^2+(m_0r/m\bar{\nu}C)^2]\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^2+1=0 \tag{b}$$

设其两个根为ν_1，ν_2，由根与系数的关系得到$(\nu_1/\bar{\nu})^2\cdot(\nu_2/\bar{\nu})^2=1$，即

$$\bar{\nu}=\sqrt{\nu_1\nu_2} \tag{8.15}$$

这样可以引几条如图8.8所示的直线，分别求出ν_1及ν_2，由式（8.15）算出$\bar{\nu}$，再求其平均值。

下面也如图8.8一样，引平行于横轴的直线，直线方程为

$$X = C \qquad C\text{：常数} \tag{c}$$

与共振曲线交点处的频率为ν_3、ν_4，可由式（8.14）与式（c）相等得$(m_0r/m)\nu^2/\sqrt{(\bar{\nu}^2\nu^2)+(2h\bar{\nu}\nu)^2}=C$，即

$$[1-(m_0r/mC)^2]\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^4-(2-4h^2)\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^2+1=0$$

的两个根求得，根与系数的关系为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\nu_3}{\bar{\nu}}\right)^2+\left(\frac{\nu_4}{\bar{\nu}}\right)^2&=\frac{2-4h^2}{1-(m_0r/mC)^2}\\ \left(\frac{\nu_3}{\bar{\nu}}\right)^2\cdot\left(\frac{\nu_4}{\bar{\nu}}\right)^2&=\frac{1}{1-(m_0r/mC)^2}\end{aligned}\right\}$$

由此得 $(\nu_3^2+\nu_4^2)\bar{\nu}^2/(\nu_3\nu_4)^2=2-4h^2$，右边$h^2$为小量，可略去而得到

$$\bar{\nu}=\frac{\nu_3\nu_4}{\sqrt{(\nu_3^2+\nu_4^2)/2}} \tag{8.16}$$

像前边一样，可以引几条横线，再由此式求固有频率的平均值。

扫描实验时激振力的振幅为$m_0r\omega^2=4\pi^2m_0r\nu^2$，按频率的平方变化。这时单位激振力产生的位移反应振幅为

$$\hat{X}=\frac{X}{4\pi^2m_0r\nu^2}=\frac{1}{4\pi^2m\sqrt{(\bar{\nu}^2-\nu^2)^2+(2h\bar{\nu}\nu)^2}} \tag{8.17}$$

它的曲线形状如图8.9，实测结果若按照一定的激振力进行换算，也可以得到类似的换算共振曲线，令式（8.17）中$\nu=\bar{\nu}$，则换算共振曲线的共振振幅为

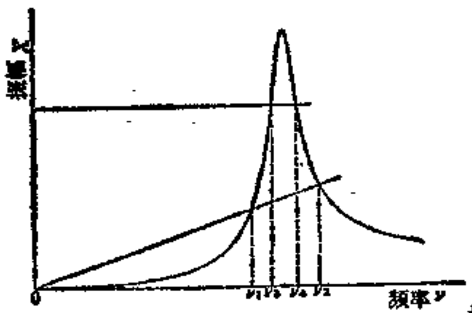


图8.8 单质点系起振机的共振曲线

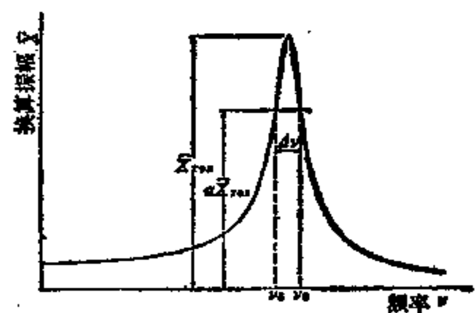


图8.9 单质点系起振机的换算共振曲线

$$\hat{X}_{res}=\frac{1}{4\pi^2 m}\cdot\frac{1}{2h\bar{\nu}^2}$$

因而式（8.17）的换算振幅为

$$\hat{X}=\frac{2h\hat{X}_{res}\bar{\nu}^2}{\sqrt{(\bar{\nu}^2-\nu^2)^2+(2h\bar{\nu}\nu)^2}} \tag{d}$$

如图8.9所示，在换算振幅的a倍高处引横轴的平行线

$$\hat{X}=a\hat{X}_{res} \tag{e}$$

求与换算曲线的交点时，可令式(e)与式(d)相等，交点为ν_5，ν_6,它们是方程

$$\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^4-2(1-2h^2)\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^2+1-4h^2/a^2=0 \tag{f}$$

的根。式(f)中$4h^2/a^2$是小量可略去，则与式(b)一样有

$$\bar{\nu}=\sqrt{\nu_5\nu_6} \tag{8.18}$$

由此可求得固有频率$\bar{\nu}$。

解式(f)得$(\nu/\bar{\nu})^2=1-2h^2\pm 2h\sqrt{(1/a)^2-1+h^2}$，忽略根号内的$h^2$有$(\nu/\bar{\nu})^2=1\pm 2h\sqrt{(1/a)^2-1}-2h^2$，近似有

$$\left.\begin{aligned}\nu_5/\bar{\nu}&=1-h\sqrt{(1/a)^2-1}-h^2\\ \nu_6/\bar{\nu}&=1+h\sqrt{(1/a)^2-1}-h^2\end{aligned}\right\}$$

如图所示，设$\nu_6-\nu_5=\Delta\nu$，则$\Delta\nu/\bar{\nu}=(\nu_6/\bar{\nu})-(\nu_5-\bar{\nu})=2h\sqrt{(1/a)^2-1}$，即

$$h=\frac{1}{2\sqrt{(1/a)^2-1}}\cdot\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \tag{8.19}$$

由此可求得阻尼比h。

在式（8.19）中令$a=1/\sqrt{2}$，则阻尼比由简单的公式表示

$$h=\frac{1}{2}\,\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}$$

这个方法称为半功率法。但应指出直线的高度不必限定为换算共振振幅的$1/\sqrt{2}$，可以引若干条与横轴平行的线，用式（8.19）求出h，再求平均值，这样可以提高精度。

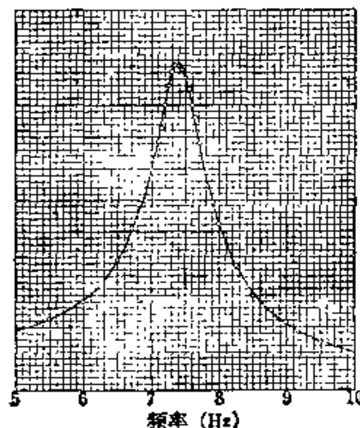


图8.10　起振机试验结果

【例题8.21】 在单层房屋屋顶安装起振机作振动试验，得到的换算共振曲线如图8.10，求固有频率及阻尼比。

〔解〕 由式（8.18)及(8.19)，求出固有频率及阻尼比如下表。

刻　度	a	$\sqrt{(1/a)^2-1}$	ν_5	ν_6	$\bar{\nu}$	$\Delta\nu$	h
45	0.879	0.542	7.20	7.59	7.39	0.39	0.049
40	0.781	0.800	7.11	7.68	7.39	0.57	0.048
35	0.684	1.066	7.00	7.78	7.38	0.78	0.050
30	0.586	1.383	6.87	7.89	7.36	1.02	0.050
25	0.488	1.789	6.70	8.04	7.34	1.34	0.051
max. 51.2				平　均	7.372	平　均	0.0496

d．多质点系统的起振机试验

将偏心矩为m_0r的起振机安放在n质点系统的质点m_k上，以转速ω（red/s）起振，这时系统的运动方程式为

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=m_0r\omega^2 e^{i\omega t}\{E\} \qquad (g)$$

式中$\{E\}$是只有第k个分量为1，其余分量均为零的矢量。

设系统有经典的正则振型，振型矩阵为$[U]$，作下列坐标变换

$$\{x\}=[U]\{q\} \qquad (h)$$

则式(g)可以改写为

$$[U]^T[M][U]\{\ddot{q}\}+[U]^T[C][U]\{\dot{q}\}+[U]^T[K][U]\{q\}=m_0r\omega^2 e^{i\omega t}[U]^T\{E\}$$

或者为

$$\{\ddot{q}\}+[2h^{(j)}\omega^{(j)}]\{\dot{q}\}+[(\omega^{(j)})^2]\{q\}=m_0r\omega^2 e^{i\omega t}[M^{(j)}]^{-1}[U]^T(E) \qquad (i)$$

式中右边$[U]^T\{E\}$是矢量

$$[U]^T\{E\}=\{u_k^{(1)}u_k^{(2)}\cdots u_k^{(n)}\}^T$$

因而式(i)按各振型分解为

$$\ddot{q}^{(j)}+2h^{(j)}\omega^{(j)}\dot{q}^{(j)}+(\omega^{(j)})^2q^{(j)}=\frac{u_k^{(j)}}{M^{(j)}}m_0r\omega^2e^{i\omega t} \qquad j=1, 2\cdots n$$

式中$M^{(j)}$是第j阶正则质量，这个方程的稳态解为

$$q^{(j)}=\frac{m_0r\omega^2u_k^{(j)}/M^{(j)}}{\sqrt{[(\omega^{(j)})^2-\omega^2]^2+[2h^{(j)}\omega^{(j)}\omega]^2}}e^{i(\omega t-\phi^{(j)})}$$

$$\phi^{(j)}=\arctan\frac{2h^{(j)}\omega^{(j)}\omega}{(\omega^{(j)})^2-\omega^2} \qquad (j)$$

因此任意质点m_i的位移x_i可由式(h)求得为

$$x_i=m_0r\omega^2\sum_{j=1}^{n}\frac{u_i^{(j)}u_k^{(j)}}{M^{(j)}\sqrt{[(\omega^{(j)})^2-\omega^2]^2+[2h^{(j)}\omega^{(j)}\omega]^2}}\sin(\omega t-\phi^{(j)}) \qquad (8.20)$$

这时激振力振幅为$m_0r\omega^2$，所以换算成相当于单位激振力的换算位移为

$$\hat{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{u_i^{(j)}u_k^{(j)}}{M^{(j)}\sqrt{[(\omega^{(j)})^2-\omega^2]^2+[2h^{(j)}\omega^{(j)}\omega]^2}}\sin(\omega t-\phi^{(j)}) \qquad (8.21)$$

或者是

$$\hat{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{u_i^{(j)}u_k^{(j)}}{K^{(j)}\sqrt{[1-(\omega/\omega^{(j)})^2]^2+[2h^{(j)}(\omega/\omega^{(j)})]^2}}\sin(\omega t-\phi^{(j)}) \qquad (k)$$

式中$K^{(j)}$是第j阶正则弹簧常数，式(k)可写为

$$\hat{x}_i=\hat{x}_i^{(1)}+\hat{x}_i^{(2)}+\cdots+\hat{x}_i^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_i^{(j)} \qquad (8.22)$$

式中

$$\hat{x}_i^{(j)}=\hat{X}_i^{(j)}\sin(\omega t-\phi^{(j)})$$

$$\hat{X}_i^{(j)}=\frac{u_i^{(j)}u_k^{(j)}}{K^{(j)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega^{(j)})^2]^2+[2h^{(j)}(\omega/\omega^{(j)})]^2}} \qquad (l)$$

即总换算位移是各个振型参与分量的总和。

一般结构物的阻尼比$h^{(j)}$的值很小，所以式(l)表示的各振型振幅$\hat{X}_i^{(j)}$的大小主要取

决于分母根号内第一项中频率比的平方 $(\omega/\omega^{(j)})^2$。对多质点系统进行扫描试验，当起振机的转速 ω 在 $\omega=\omega^{(j)}$ 附近时，式(1)中的根号为极小值，$X_i^{(j)}$ 相应为极大值，这时换算共振曲线出现峰值，因而图8.7所示的共振曲线也出现峰值。

但是对某些阶振型来说，在峰值处其他振型的参与分量并非全为零，即峰值中不同程度地掺杂了其他振型的影响。在起振机试验中，某个振型的峰值振幅受其他振型影响的现象称为振型干涉。

由多质点系统起振机试验结果推算系统固有频率及阻尼比时，有必要注意以下几点：

（i）当固有频率 $\omega^{(j)}$ 与相邻阶振型的固有频率 $\omega^{(j\pm1)}$ 相隔充分远，例如象图8.7的一阶振型共振点附近那样，由各层的共振曲线形状可以判断振型干涉很小，因而峰值独立存在时，可以近似采用前节所述的单质点系分析方法。

(ii) 在图8.7所示的第二阶振型共振点附近，除第5层以外各层的共振曲线也与上述情况相同。但第5层的共振曲线显然有较大的振型干涉影响，故不能用上面的分析方法处理。这种强烈干涉与起振机所在的层数几乎无关。这是因为干涉是在原来振型的固有函数取极小值处产生的，比如图6.13中二阶振型的质点 m_4 处。

(iii) 一般说来，低阶振型引起的干涉影响比高阶振型要强。但是因为系统的特性不同，并非总是如此。因而有的方法提出利用低阶振型的分析结果逐次消去高阶振型处的干涉影响[25)]，在应用时要十分注意它的适用条件。

(iv) 对于振型干涉的大小，便于判断的方法是事先将模型的共振曲线中各振型的参与分量，即式(8.22)各项的值进行试算。但此时要注意，各阶振型有式(i)所表示的相位差。

---

25) Hoerner, J.B.& Jennings, P.C.,Modal Interference in Vibration Tests,Proc.ASCE,Engineering Mechanics Division,August 1969.

参 考 文 献

代替后记，把写作本书时经常放在案头参考的文献记录在此。关于讨论具体问题时引用的文献，已在附注中写明，这里不再提及。因此，这里主要列举与全书整个内容有关或与特定章节内容有关的文献。

本书使用的术语及其定义主要参考下列辞典：

理化学辞典，岩波书店，增订第5版，1962年.

Lapedes,B.N.(editor):Dictionary of Scientific and Technical Terms,McGraw-Hill,Inc.,1974.

关于数学部分，整体内容参考如下文献：

Courant,R.und Hilbert,D.:Methoden der Mathematischen Physik,Zweite Verbesserte Auflage,Julius Springer,Berlin,1931-1937.

寺沢寛一：自然科学者のための数学概论，增订版，岩波书店，1974.

坪井善胜，田治见宏，角野晃二：応用数学，建筑構造講座4，コロナ社，1963年.

近藤次郎：技术者・研究者のための応用数学，丸善，1965年.

数学ハンドブック编集委员会：理工学のための数学ハンドブック，丸善，1974年.

特定章节中，矩阵、固有值问题的参考文献有：

Hildebrand,F.B.:Methods of Applied Mathematice,Second Edition,Prentice-Hall,Inc.,1965.

加藤勉：固有值问题、建筑構造学大系4，彰国社，1967年.

R.ツルシエール(瀬川富士・高市成方共訳)：マトリックスの理论と応用，理工学海外名著シリーズ5，ブレイン图书出版株式会社，1975年.

拉普拉斯变换及富里哀变换的主要参考文献为：

山田直平・国枝寿博：ラプラス变换・演算子法，応用数学講座第10卷，コロナ社，1973年.

Papoulis,A.:The Fourier Integral and its Applications,McGraw-Hill,Inc.,1962.

本书振动学或振动理论部分的参考文献中，首先要特别提到

Cherry,S.:Dynamics of Structures,JISEE Lecture Notes No.5,International Institute of Seismology and Earthquake Engineering,Tokyo,1968.

这是加拿大Cherry博士在建设省国际地震工程研究所的讲稿，没有公开发表。篇幅不过100页，但是对于结构振动理论的整个要点却叙述得提纲挈领，简明扼要，对著者考虑本书的内容结构帮助极大，且始终未离手。其他收益非浅的参考书属日本国内的有：

松平　精：基础振动学，现代工学社，1973年(复刻版)

田治见　宏：建筑振動学，建筑構造講座第17卷，コロナ社，1965年.

武藤　清：構造物の動的解析，耐震設計シリーズ4，丸善，1970年.

武藤　清：構造物の動的設計，耐震設計シリーゲ/応用编，丸善，1977年.

国外著作有：

Harris,C.M.&Crede,C.E.(editors):Shock and Vibration Handbook,Second Edition,McGraw-Hill,Inc.,1976.

Hurty,W.C.&Rubinstein,M.F.:Dynamics of Structures,Prentice-Hall,Inc.,1964.

Wiegel,R.L.(editor):Earthquake Engineering,Prentice-Hall,Inc.,1970.

Newmark, N. M. & Rosenblueth, E.: Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1971.

Clough R. W. & Penzien, J.: Dynamics of Structures, McGraw-Hill, Inc., 1975.

最后列举的那本著作，著者不仅作为参考书，而且在本书执笔前曾作为共译者之一将其译成日文，最近已由科学技术出版社出版，书名为《構造物の動的解析》。这是一本内容全面且实用的好参考书，翻译过程中我感到如果有一本一直追溯到更为基础部分的与之衔接的书就更好了。可以说，这也是写作本书的动机之一。此外，下面这篇论文

瀧沢春男：强震时における建築構造物の挙動の解析，1973年.

是东京大学工学系大学院的博士论文，从理论上对振动加以高度精巧的系统化，受益颇多。

在此，谨向上述著作的作者再次表示深切的谢意。与此同时，也向想要进一步学习振动理论及其应用的读者推荐上述著作。